ফলিত গণিতের পদ্ধতি

মোঃ আব্দুল্লাহ আনসারী

ফলিত গণিতের পদ্ধতি

(Methods of Applied Mathematics)

ড. মোঃ আব্দুল্লাহ আনসারী
প্রফেসর, গণিত বিভাগ
রাজশাহী বিশ্ববিদ্যালয়
রাজশাহী

বাংলা একাডেমী ঢাকা

প্রথম প্রকাশ
বৈশাখ ১৪০৬/মে ১৯৯৯

বাএ (৯৮-৯৯ পাঠ্যপুস্তক : ভৌ ও প্র ৫) ৩৮৯০

মুদ্রণ সংখ্যা ১২৫০

পাণ্ডুলিপি প্রণয়ন ও মুদ্রণ তত্ত্বাবধান
ভৌতবিজ্ঞান ও প্রকৌশল উপবিভাগ
ভৌ ও প্র ১৯০

প্রকাশক
গোলাম মঈনউদ্দিন
পরিচালক
পাঠ্যপুস্তক বিভাগ
বাংলা একাডেমী, ঢাকা

মুদ্রক
মধুপুর প্রিন্টার্স
১৫/সি, আজিমপুর, ঢাকা

প্রচ্ছদ
মোস্তাহারুল হক চৌধুরী

মূল্য : ১৫০.০০

FALITA GANITER PADDHATI (Methods of Applied Mathematics) by Dr. Md. Abdullah Ansari, Professor, Department of Mathematics, Rajshahi University. Published by Gholam Moyenuddin, Director, Textbook Division, Bangla Academy, Dhaka, Bangladesh. First edition, May 1999. Price Tk. 150.00

ISBN 984-07-3899-2

উৎসর্গ

আমার সহধর্মিণী

শামীমা বানু-কে

ভূমিকা

'গণিত বিজ্ঞানের ভাষা'। এ কারণেই হয়তো বা গণিত প্রাচীনকাল থেকেই লেখাপড়ার একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হিসেবে চলে আসছে। ফলিত গণিত (গাণিতিক সমস্যা ও সমাধানের পদ্ধতি) এ রকম একটি গণিতের শাখা যার প্রয়োজনীয়তা অত্যন্ত বেশি। এ শাখাটি গণিতবিদ ছাড়াও প্রকৌশলী, পদার্থবিদ, রসায়নবিদসহ বহু বিজ্ঞানী, শিক্ষক ও গবেষকদের বলিষ্ঠ হাতিয়ার। বহু বাস্তব সমস্যা সমাধানে গণিতের এ শাখাটির প্রয়োগ ব্যাপক। এসব গুরুত্ব বিবেচনা করে বইটির বিষয়বস্তু আমাদের দেশের সর্বস্তরের পাঠকদের কাছে সহজভাবে উপস্থাপন করার জন্য বাংলা ভাষায় এটি রচনা করায় আগ্রহী হই। মূল বিষয়বস্তু ঠিক রেখে অতি সহজভাবে বইটি লেখার চেষ্টা করা হয়েছে।

ফলিত গণিতের এ শাখাটি বহুমুখী সমস্যা ও সমাধান-এর সমাবেশ। লেখাপড়ার জন্য শিক্ষানবিগদের বিদেশী বইয়ের উপরই নির্ভর করতে হয়। কিন্তু বিদেশী কোনো বইতে এতো বহুমুখী পঠনীয় বিষয় সন্নিবেশিত থাকে না। ফলে কমপক্ষে এ শাখার জন্য অন্তত দশ বারটি বই শিক্ষার্থীদের জন্য যোগাড় করতে হয়। কিন্তু আমাদের দেশের কলেজ ও বিশ্ববিদ্যালয়গুলিতে এসব বইয়ের পর্যাপ্ত মজুদ না থাকায় ছাত্র-ছাত্রীদের অনেক সমস্যায় পড়তে হয়। নির্ভর করতে হয় কেবল শিক্ষকদের শ্রেণীকক্ষের বক্তৃতা ও নোটের উপর যা কেবল পাঠের উপর সীমিত সামগ্রী। এসব বহুবিধ কারণ মনে রেখে বাংলা ভাষায় একটি বইয়ের মধ্যে এ শাখার পঠনীয় বিষয়গুলি অন্তর্ভুক্ত করে বইটি রচনা করার কাজ হাতে নেই। কাজেই বইটি প্রকাশিত হলে ছাত্র-ছাত্রীদের কাছে যেমন এটি সহজলভ্য হবে তেমনই শিক্ষণীয় বিষয়গুলো তাদের কাছে পৌঁছাবে, ফলে তাদের শিক্ষা তথা জ্ঞানের পরিধি বাড়বে। কারণ, এ বইটি কলেজ ও বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষার্থীদের পাঠ্য বই হিসেবে ব্যবহারের উপযোগী করে তৈরি করা হয়েছে। বিজ্ঞানের যে কোনো শাখা, প্রকৌশল শাখাসহ সকল ছাত্র-ছাত্রী প্রয়োজনে বইটি কাজে লাগাতে পারবেন। অনেক উপপাদ্য এবং তাদের প্রমাণের পাশাপাশি নানারকম সমস্যা এবং সমাধান

সন্নিবেশিত করা হয়েছে। এগুলির সাহায্যে শিক্ষার্থিগণ যাতে নিজে নিজেই বিষয়বস্তু বুঝে নিতে পারে সে দিকে যথেষ্ট নজর রাখা হয়েছে। গাণিতিক মূল পরিভাষাগুলোকে ভাষান্তর না করার পক্ষ অবলম্বন করা হয়েছে।

বইটি প্রকাশের জন্য পাণ্ডুলিপি রচনা করতে যাদের প্রেরণা পেয়েছি তাঁদের প্রতি আমি কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করছি। বাংলা একাডেমীর সংশ্লিষ্ট কর্মকর্তাগণ আমাকে বিশেষভাবে উৎসাহিত করায় আমি এ কাজ হাতে নিয়েছি। এ জন্য তাঁদেরকে ধন্যবাদ না জানিয়ে পারছি না। বইটির উৎকর্ষ সাধনে যে কোনো পরামর্শ সাদরে গ্রহণীয়।

আবদুল্লাহ আনসারী

সূচিপত্র

পৃষ্ঠা

প্রথম অধ্যায়

গামা, বিটা, ভ্রম এবং ডিরাক ডেল্টা ফাংশন

(Gamma, Beta, Error and Dirac-Delta Functions)

১.১ সূচনা

বহু গাণিতিক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে ব্যাপকভাবে গামা ফাংশন এবং বিটা ফাংশনের ব্যবহার হয়ে থাকে। এখানে গামা ফাংশন ও বিটা ফাংশনের ধর্ম নিয়ে খুব বেশি আলোচনা করা সম্ভব নয়। তবে কিছুটা সংক্ষিপ্ত আকারে সেগুলি উপস্থাপন করার চেষ্টা করা হবে।

১.২ গামা ফাংশন (Gamma function) : গণিতবিদ অয়লার (Leonhard Euler : 1707—1783)

গামা ফাংশন $\Gamma(n)$ এর নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞা দান করেন :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \; , \; n > 0 \qquad (১.১)$$

যখন n এর মান ধনাত্মক তখন সমাকলন (১.১) এর ধর্ম অভিসারী। অতএব সমাকলন (১.১) n এর একটি ফাংশন যখন n এর মান ধনাত্মক। উপরিউক্ত সমাকলন থেকে আমরা সরাসরি পাই

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1 \qquad (১.২)$$

আবার (১.১) থেকে আংশিক সমাকলন পদ্ধতিতে নিম্নের সম্পর্কটি উপস্থাপন করা যায় :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx + \Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^\infty$$

$$= n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

একে (১.১) এর সাথে তুলনা করে আমরা দেখতে পাই

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \qquad (১.৩)$$

এ সম্পর্কটি গামা ফাংশনের পৌনঃপুনিক সম্পর্ক। এ সম্পর্ক থেকে এটি পরিষ্কার যে, n এর একটি ধনাত্মক মানের জন্য যদি $\Gamma(n)$ এর মান জানা থাকে তবে $\Gamma(n+1)$ এর মান (১.৩) থেকে পাওয়া যাবে। যদি (১.১) থেকে $\Gamma(n)$ এর মান নির্ণয় কোনো অবস্থাতে সম্ভব না হয় তবে (১.৩) থেকে $\Gamma(n)$ এর মান নির্ণয় করা সম্ভব হবে।

আমরা (১.৩) কে নিম্নোক্তভাবে লিখতে পারি :

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \qquad (১.৪)$$

তাহলে যদি

$$-1 < n < 0 \qquad (১.৫)$$

হয় তখন (১.৪) থেকে $\Gamma(n)$ এর মান পাওয়া যাবে কারণ $n+1$ ধনাত্মক। তারপর আমরা $-2 < n < -1$ এর জন্য $\Gamma(n)$ এর মান নির্ণয় করতে পারি যেহেতু (১.৪) এর ডানপক্ষে $(n+1)$ এর মান জানা। ফলে অনির্দিষ্টভাবে এর মান নির্ণয় করা যায়, যদি $n \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ ।

১.৩ উৎস, ফাংশন ও গাউসের পাই ফাংশন

আমরা (১.২) হতে দেখতে পাই যে

$$\Gamma(1) = 1$$

এখন (১.৩) থেকে অনুরূপভাবে পাওয়া যায়

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1$$
$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1$$
$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2.1$$
$$\Gamma(5) = 4.\Gamma(4) = 4.3.2.1$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

ফলে পরিশেষে পাওয়া যায়

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (১.৬)$$

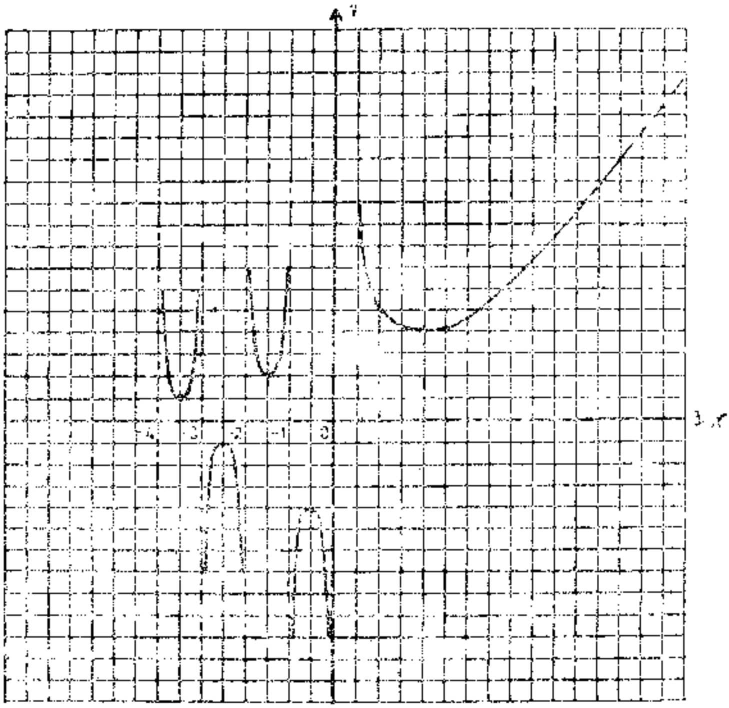
যেখানে n হলো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এ সম্পর্ক থেকে আমরা 0! এর মান নির্ণয় করতে পারি, তা হলো

$$\Gamma(1) = 1 = 0!$$

অর্থাৎ $0! = 1$

গামা ফাংশনের মাধ্যমে গাউসের পাই ফাংশন, $\pi(n)$ এর সংজ্ঞা দেয়া যায় ;

$$\pi(n) = \Gamma(n+1) \tag{১.৭}$$



চিত্র : ১.১

কাজেই আমরা দেখতে পাই যে, যখন n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা তখন

$$\pi(n) = n! \tag{১.৮}$$

যদি (১.৪)-এ $n = 0$ বসানো যায় তবে আমরা নিচের ফলটি পাই ;

$$\Gamma(0) = \lim_{n \to 0} \frac{\Gamma(n+1)}{n} = \infty \tag{১.৯}$$

এখন দেখা যায় যে, n এর মান শূন্য বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে (১.৪) এর পৌনঃপুনিক প্রয়োগ দ্বারা গামা ফাংশনের মান অসীম হয়, কারণ

$$\lim_{n \to -1^+} \Gamma(n) = -\infty, \quad \lim_{n \to -1^-} \Gamma(n) = +\infty$$

কাজেই n এর মান শূন্য বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে

$$\Gamma(n) = \infty \tag{১.১০}$$

১.৪ $\Gamma(\frac{1}{2})$ এর মান

মৌলিক সমাকলন (১.১)-এ যদি চলক x কে নিম্নোক্তভাবে পরিবর্তন করা হয় তাহলে আমরা পাই

$$x = y^2 \tag{১.১১}$$

তার ফলে সমাকলনটি দাঁড়ায়

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy \tag{১.১২}$$

এখন যদি আমরা $n = \frac{1}{2}$ বসাই তাহলে (১.১২) থেকে পাওয়া যায়

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy \tag{১.১৩}$$

এই নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয় করে পাওয়া যায়

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

অথবা $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{১.১৪}$$

এরপর সমীকরণ (১.8)-এ $\Gamma(\frac{1}{2})$ এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

অথবা $$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi} \tag{১.১৫}$$

আবার একই নিয়মে

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \tag{১.১৬}$$

ইত্যাদি মান নির্ণয় করা সম্ভব।

অভিসৃতি

মনে করি
$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

এর মান সসীম যখন a এবং b সসীম। তাহলে আমরা অপ্রকৃত সমাকলন $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ কে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি :

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} I = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)\, dx = k$$

অথবা
$$\lim_{b \to \infty} I = k$$

যেখানে k সসীম। এক্ষেত্রে অপ্রকৃত সমাকলনকে অভিসারী বলে এবং অপ্রকৃত সমাকলনের মান হবে k। যদি $k \to \pm\infty$ যখন $b \to \infty$ তখন অপ্রকৃত সমাকলনকে অপসারী বলে এবং তার মান পাওয়া যাবে না। গামা ফাংশনের ক্ষেত্রে উপরিউক্ত নিয়মে অভিসৃতি প্রযোজ্য হবে, যেখানে $f(x) = e^{-x} x^{n-1}$ ।

১.৫ বিটা ফাংশন (Beta function)

বিটা ফাংশন $\beta(m, n)$ কে নিম্নোক্ত নির্দিষ্ট সমাকলন দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় :

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx \qquad (১.১৭)$$

যেখানে $m > 0$, $n > 0$ । এই সমাকলনটি অভিসারী এবং ফলে এটি m, n এর ফাংশন যেখানে m এবং n ধনাত্মক। যদি চলক x পরিবর্তন করা যায় যখন

$$x = 1 - y \qquad (১.১৮)$$

তখন (১.১৭) হতে পাওয়া যায়

$$\beta(m, n) = \int_0^1 (1-y)^{m-1} y^{n-1}\, dy = \beta(n, m)$$

অর্থাৎ
$$\beta(m, n) = \beta(n, m) \qquad (১.১৯)$$

আবার যদি চলক x এর পরিবর্তে $x = \sin^2\theta$ লেখা যায় তবে (১.১৭) থেকে আমরা পাই

$$\beta(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2m-1} (\cos\theta)^{2n-1} d\theta \tag{১.২০}$$

(১.১৭) তে $x = y/a$ স্থাপন করে আরও পাওয়া যায়

$$\beta(m, n) = \frac{1}{a^{m+n-1}} \int_0^a y^{m-1} (a-y)^{n-1} dy \tag{১.২১}$$

যদি $x = y/(1+y)$ স্থাপন করি তাহলে (১.১৭) দাঁড়ায়

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy \tag{১.২২}$$

এগুলি বিটা ফাংশনের সাধারণ আকার বা বিটা ফাংশনের সংজ্ঞা হিসেবেই গণ্য করা হয়ে থাকে।

১.৬ গামা ফাংশন এবং বিটা ফাংশনের সম্পর্ক

আমরা (১.১২) অনুসারে গামা ফাংশন বিবেচনা করতে পারি যা হলো

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy \tag{১.২৩}$$

ফলে অনুরূপভাবে পাওয়া যায়

$$\Gamma(m) = 2\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx \tag{১.২৪}$$

কাজেই,

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\left(\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy\right)$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy \tag{১.২৫}$$

ডানপক্ষের সমাকলনকে যদি প্রথম চতুর্থাংশে xy তলের উপর বিবেচনা করা যায় তাহলে উক্ত তলে সমাকলনের মান সহজেই নির্ণয় করা যায়। মনে করি

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (১.২৬)$$

এবং তাহলে মৌলিক তল ds হবে

$$ds = r\,dr\,d\theta \qquad (১.২৭)$$

ফলে (১.২৫) এর আকার হবে নিম্নরূপ :

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} r^{\,2(m+n-1)}\,(\cos\theta)^{2m-1}\,(\sin\theta)^{2n-1}\,e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2m-1}\,(\sin\theta)^{2n-1}\,d\theta\int_0^{\infty} r^{2(m+n-1)}\,e^{-r^2}\,dr \qquad (১.২৮)$$

এখন (১.২০) থেকে আমরা পাই

$$\beta(n,m) = 2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2m-1}\,(\sin\theta)^{2n-1}\,d\theta = \beta(m,n) \qquad (১.২৯)$$

এবং (১.২৪) থেকে পাওয়া যায়

$$\Gamma(m+n) = 2\int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1}\,e^{-r^2}\,dr \qquad (১.৩০)$$

কাজেই (১.২৯) এবং (১.৩০) কে ব্যবহার করে (১.২৮) কে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = \beta(m,n)\,\Gamma(m+n) \qquad (১.৩১)$$

অথবা
$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad (১.৩২)$$

যা বিটা এবং গামা ফাংশনের মধ্যে সম্পর্ক।

বিশেষ শ্রেণীর নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয়ের জন্য (১.৩২) সম্পর্কটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। উদাহরণস্বরূপ আমরা সমাকলন (১.২৯) এবং (১.৩২) বিবেচনা করে পাই,

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m-1} (\sin\theta)^{2n-1} d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)} \tag{১.৩৩}$$

যেখানে $m>0,\ n>0$

এখন (১.৩৩)-এ, মনে করি

$$2m-1=r \qquad \text{যেখানে } m=\frac{r+1}{2}$$

$$2n-1=0 \qquad \text{এবং } n=\tfrac{1}{2}$$

তাহলে আমরা পাই

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^r d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{১.৩৪}$$

যেখানে $r>-1$

অনুরূপভাবে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে

$$\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^r d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{১.৩৫}$$

যেখানে $r>-1$; এভাবে গামা ফাংশনের মাধ্যমে বহু সমাকলনের মান নির্ণয় করা সম্ভব।

১.৭ গামা ফাংশনের একটি গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক

আমরা (১.২২) এবং (১.৩২) থেকে পাই

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}\,dy}{(1+y)^{m+n}} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad m>0,\ n>0 \tag{১.৩৬}$$

যদি আমরা ধরে নেই যে

$$m=1-n, \quad 0<n<1 \tag{১.৩৭}$$

তাহলে (১.৩৬) থেকে পাওয়া যায়

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}\,dy}{1+y} = \frac{\Gamma(1-n)\,\Gamma(n)}{\Gamma(1)} \tag{১.৩৮}$$

এখন বামপক্ষের মান নির্ণয়ের জন্য মনে করি

$$W(z) = \frac{z^n}{1+z} \qquad (১.৭৯)$$

তাহলে $W(z)$ এর পোল (pole) হলো $z = -1$ এবং $z = -1$ বিন্দুতে অবশেষ (residue) পাওয়া যাবে :

$$\lim_{z \to -1} \left[(1+z) \frac{z^n}{1+z} \right] = (-1)^{n-1} = e^{\pi i(n-1)} = -e^{\pi i n}$$

যেখানে $i = \sqrt{-1}$

কাজেই আমরা সমাকলনের ফল হিসেবে পাই

$$\int_0^\infty x^{n-1} Q(x)\, dx = \frac{2\pi i \Sigma R}{1 - e^{2\pi i n}}$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{y^{n-1}\, dy}{1+y} = -\frac{2\pi i\, e^{\pi i n}}{1 - e^{2\pi i n}} = -\frac{2\pi i}{e^{-\pi i n} - e^{\pi i n}}$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi n}, \quad 0 < n < 1 \qquad (১.৮০)$$

এর ফলে আমরা পাই, যেহেতু $\Gamma(1) = 1$

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \qquad (১.৮১)$$

১.৮ গামা ফাংশনের প্রতিসূত্র (Duplication formula of gamma function)

এই সূত্রটি হলো

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\, \Gamma(2n) = 2^{2n-1}\, \Gamma(n)\, \Gamma(n + \tfrac{1}{2}) \qquad (১.৮২)$$

যা সহজেই প্রমাণ করা যায়।

বি: দ্র: গামা ফাংশনের বিকল্প সংজ্ঞা হলো

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, n^z}{(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}, \quad z > 0 \qquad (১)$$

যা z এর ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক মানের প্রযোজ্য। এ থেকে পরিস্কার যে $\Gamma(z)$ এর ব্যতিক্রমী বিন্দুগুলি হলো

$$z = 0\,,\ -1\,,\ -2\,,\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

এখন (১.১) হতে আমরা পাই

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{nz}{(z+n+1)}\cdot\frac{n!\,n^{z}}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{nz}{z+n+1}\right\}\cdot\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^{z}}{z(z+1)\cdots(z+n)}\right\} \\
&= z\,\Gamma(z) \qquad (২´)
\end{aligned}$$

যা প্রমাণ করে যে গামা ফাংশনের সংজ্ঞা (১.১) এবং (১´) সমতুল।

অয়লারের গামা ফাংশনের সংজ্ঞা কিছু ভিন্ন আকারে দেয়া যায়, তা হলো

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\left\{n^{z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}\right\} \qquad (৩´)$$

অথবা

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{n\to\infty}\left\{n^{-z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)\right\} \qquad (৪´)$$

যেখানে,

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right) = (1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right) \qquad (৫´)$$

এখন আমরা (৪´) কে একক মান ধরে

$$1 = \left(\lim_{n\to\infty}\exp\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]z\right)$$

$$\times\left(\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}e^{-z/m}\right) \qquad (৬´)$$

দ্বারা গুণ করতে পারি যার ফলে আমরা পাই

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left(\lim_{n \to \infty} \exp\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] z \right.$$

$$\left. \times \lim_{n \to \infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m} \right) \qquad (৭)$$

কিন্তু আমরা জানি

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log_e n\right) = \gamma \qquad (৮)$$

যেখানে $\gamma \simeq 0.577$, অয়লার ধ্রুবক নামে পরিচিত।

ফলে আমরা পাই

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{\left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}\right\} \qquad (৯)$$

যেখানে অসীম গুণফল $\prod_{m=1}^{\infty}$ হলো $\lim_{n \to \infty} \prod_{m=1}^{n}$

গামা ফাংশনের এই আকার অয়াস্ট্র্যাস সংজ্ঞা হিসেবে পরিচিত।

গামা ফাংশনের খুব কাছাকাছি সম্পর্কযুক্ত আরও ফাংশন আছে যা নিচে দেওয়া হলো:

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \quad (x > 0) \qquad (১০)$$

যা শক্তি-সমাকলন নামে পরিচিত। আর একটি ফাংশন যাকে লগারিদমিক-সমাকলন বলে, তার সংজ্ঞা হলো

$$L_1(x) = \int_0^{x} \frac{du}{\log u} \qquad (১১)$$

এ দুটি ফাংশন পরস্পর নিম্নোক্তভাবে সম্পর্কযুক্ত :

$$E_1(x) = -L_1(e^{-x}) \qquad (৪^{'})$$

আরো দুটি গুরুত্বপূর্ণ সমাকলন হলো সাইন এবং কোসাইন সমাকলন। উপরিউক্ত সমাকলনের সংজ্ঞা অনুসারে

$$\left.\begin{aligned} C_1(x) &= +\int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \\ S_1(x) &= \int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du \end{aligned}\right\} \qquad (৫^{'})$$

$$= \pi/2 - \int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$$

উপরিউক্ত ফাংশনগুলি ফলিত গণিতে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে।

উদাহরণ

১। মান নির্ণয় কর :

$$I = \int_0^1 \sqrt{\left(\log_e \frac{1}{x}\right)}\,dx$$

সমাধান : মনে করি $x = e^{-t}$

তাহলে সমাকলনটি দাঁড়ায়

$$I = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

২। মান নির্ণয় কর :

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\tan^8\theta + \tan^6\theta\right) e^{-\tan^2\theta}\,d\theta$$

সমাধান ঃ মনে করি

$$\tan^2\theta = t$$

তাহলে সমাকলনটি দাঁড়ায়

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty t\, e^{-t} = \frac{1}{2}\,\Gamma(2) = \frac{1}{2}$$

৩। মান নির্ণয় কর :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

সমাধান ঃ মনে করি

$$x^4 = t$$

তাহলে সমাকলনটি দাঁড়ায়

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{t^{-3/4}}{\sqrt{(1-t)}}\,dt = \frac{1}{4}\,B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\;\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

যেহেতু $\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

৪। মান নির্ণয় কর :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta$$

সমাধান ঃ মনে করি

$$\sin^2\theta = t$$

তাহলে আমরা পাই

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^{-1/4}}{\sqrt{(1-t)}}\, dt = \frac{1}{2}\, B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

যেহেতু $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ এবং $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

১.৯ ভ্রম ফাংশন (Error function)

আর একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ফাংশন যা ফলিত গণিতের বিভিন্ন শাখায় প্রায়ই প্রয়োগ হয়ে থাকে তাহলো ভ্রম ফাংশন (error function), $\mathrm{er\,f}(x)$। সম্ভাবনা সমাকলন হিসেবেও এর ব্যবহার আছে। এই ফাংশনকে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়;

$$\mathrm{er\,f}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du \tag{১.৪৩}$$

সম্ভাবনা শাস্ত্রের ক্ষেত্রে যেমন এর ব্যবহার আছে তেমনই পদার্থবিদ্যা সংক্রান্ত আংশিক অন্তরক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করার জন্যও এই ফাংশনের যথেষ্ট ব্যবহার হয়ে থাকে।

ভ্রম ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

$$\mathrm{er\,f}(-x) = -\,\mathrm{er\,f}(x) \tag{১.৪৪}$$

$$\mathrm{er\,f}(0) = 0 \tag{১.৪৫}$$

$$\mathrm{er\,f}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \tag{১.৪৬}$$

$$\mathrm{er\,f}(iy) = \frac{2i}{\pi}\int_0^y e^{u^2}\,du,\ (i = \sqrt{-1}) \tag{১.৪৭}$$

ত্রম ফাংশনের খুব কাছাকাছি আরও দুটি ফাংশন আছে যাদের নাম ফ্রেশনেল সমাকলন (Fresnel integral)। এই ফাংশন দুটি হলো

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi u^2\right) du$$

$$S(x) = \int_0^x \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi u^2\right) du$$

তরঙ্গজনিত সমস্যার ক্ষেত্রে $C(x)$ এবং $S(x)$ এর উদ্ভব হয়। এর ব্যবহারে অনেক সমস্যার সমাধান সহজ হয়ে আসে।

১.১০ ডিরাক-ডেল্টা ফাংশন (Dirac-delta function)

গাণিতিক পদার্থবিদ্যায় অনেক সময় এমন কতকগুলি ফাংশন পাওয়া যায় যার ক্ষুদ্র ব্যবধানের মধ্যে অশূন্য মান থাকে। ডিরাক-ডেল্টা ফাংশন এ ধরনের একটি ফাংশন যা কোয়ান্টাম বলবিদ্যা এবং ফলিত গণিতের মধ্যে ব্যাপকভাবে ব্যবহার করা হয়।

যদি নিম্নের ফাংশনটি বিবেচনা করা হয় :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \tag{১.৪৮}$$

তাহলে এটি স্পষ্টত দেখানো হলো যে

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\, d = 1 \tag{১.৪৯}$$

যদি কোনো ফাংশন $f(x)$ ব্যবধান $(-a, a)$ এর মধ্যে সমাকলনযোগ্য হয় তাহলে, গড় মান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখানো যায় যে,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_a(x)\,dx = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = f(\theta a) \tag{১.৫০}$$

যেখানে $|\theta| \leq 1$

এখন আমরা নিম্নোক্ত সংজ্ঞা ব্যবহার করব :

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \delta_a(x) \tag{১.৫১}$$

সমীকরণ (১.৪৮) এবং (১.৪৯)-এ যদি $a \to 0$ ব্যবহার করা হয় তবে আমরা দেখতে পাই ফাংশন $\delta(x)$ নিম্নের সম্পর্কগুলি সিদ্ধ করে :

$$\delta(x) = 0\,, \quad x \neq 0 \tag{১.৫২}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{১.৫৩}$$

সমীকরণ (১.৫২) এবং (১.৫৩)-তে যে ফাংশন, $\delta(x)$, সঞ্জারিত করা হলো তাকে ডিরাক-ডেল্টা ফাংশন বলে। গণিতে যে সকল ফাংশন সচরাচর ব্যবহার করা হয়, ডিরাক-ডেল্টা ফাংশন $\delta(x)$ তাদের মতো নয়। কোনো অঞ্চলের (domain) প্রতিটি বিন্দুতে এর নির্দিষ্ট মানের জন্য ডিরাক-ডেল্টা ফাংশনের সংজ্ঞা দেয়া হয়। এ কারণে বিখ্যাত বিজ্ঞানী ডিরাক এ ফাংশনকে অপ্রধান ফাংশন হিসেবে আখ্যায়িত করেছেন। গাণিতিক বিশ্লেষণে এর ব্যবহারে যখন কোনো অসঙ্গতা না আসে তখন ডিরাক-ডেল্টা ফাংশন $\delta(x)$ কে ব্যবহার করা যায়। সীমিত পদ্ধতিতে ডিরাক ডেল্টা ফাংশন $\delta(x)$ অন্য ফাংশন, যেমন $\delta_a(x)$ এর সাথে ব্যবহার করা হয়। কিন্তু $\delta(x)$ এবং এর জাতক সনাতন বলবিদ্যা এবং কোয়ানটাম বলবিদ্যা এর প্রান্তিক মান সমস্যাগুলির সূত্র নির্ণয় ও সমাধানের ক্ষেত্রে ব্যাপক ভূমিকা পালন করে। কাজেই ডিরাক-ডেল্টা ফাংশনের ধর্মগুলি নির্ণয় করা গুরুত্বপূর্ণ বিষয়।

প্রথমেই আমরা লক্ষ্য করি যে মূলবিন্দুর প্রতিবেশীতে $\delta(x)$ এর মানের পরিবর্তন খুব গুরুত্বপূর্ণ নয়, যদি এর দোদুল্যমানতা খুব বেশি না হয়। উদাহরণস্বরূপ, ফাংশন

$$\delta(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi x}$$

সমীকরণ (১.৫২) এবং (১.৫৩) কে সিদ্ধ করে এবং (১.৫১) এর ধর্মও এর মধ্যে বিদ্যমান।

যদি সমীকরণ (১.৫০) এ আমরা ধরে নিই যে a এর মান শূন্যের দিকে যাবে, $a \to 0$, তাহলে আমরা নিম্নের সম্পর্কটি পাই :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\, dx = f(0) \tag{১.৫৪}$$

এটি থেকে সহজভাবে চলক পরিবর্তন করে নিম্নের রূপান্তরটি পাওয়া যায় :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\, dx = f(a) \tag{১.৫৫}$$

অন্যকথায় বলা যায় যে, $f(x)$ কে $\delta(x-a)$ দ্বারা গুণ করে এবং x এর সকল মানের জন্য একে সমাকলন করে যে মান পাওয়া যায় তা মূল ফাংশনে x এর পরিবর্তে a বসালে যে মান হয় তার সমান। প্রতীক হিসেবে আমরা লিখতে পারি,

$$f(x)\,\delta(x-a)=f(a)\,\delta(x-a) \tag{১.৫৬}$$

কিন্তু স্মরণ রাখতে হবে যে, এই ফলটি কেবল সমাকলনের মধ্যে উৎপাদক হিসেবে ব্যবহার করলে সমতা বিধান হবে। বিশেষ একটি ঘটনার ক্ষেত্রে পাওয়া যায়

$$x\,\delta(x)=0 \tag{১.৫৭}$$

অনুরূপভাবে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে

$$\delta(-x)=\delta(x) \tag{১.৫৮}$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\,\delta(x)\,,\quad a>0 \tag{১.৫৯}$$

$$\delta(a^2-x^2)=\frac{1}{2a}\left\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\right\} \tag{১.৬০}$$

যেখানে $a>0$

আমরা এখন $\delta(x)$ এর জাতকের উপর কিছু বিশ্লেষণ করব। যদি আমরা ধরে নেই যে $\delta'(x)$ এর মান আছে এবং $\delta(x)$, $\delta'(x)$ কে সাধারণ ফাংশনের মতো আংশিক সমাকলন করা যাবে তাহলে

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x)\,dx=\Big[f(x)\,\delta(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\;\delta(x)\,dx$$

$$=-f'(0) \tag{১.৬১}$$

এই প্রক্রিয়া পুনঃপুনঃ চলতে থাকলে আমরা শেষ পর্যন্ত দেখতে পাই যে

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta^n(x)\,dx=(-1)^n f^n(0) \tag{১.৬২}$$

একটি মন্তব্য প্রায়ই করা হয়ে থাকে যে ডিরাক-ডেল্টা ফাংশন হলো হেভি-সাইড (heaviside) একক ফাংশনের জাতক। হেভিসাইড একক ফাংশন $H(x)$

নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত।

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{যদি } x > 0 \text{ হয়} \\ 0, & \text{যদি } x < 0 \text{ হয়} \end{cases}$$

এ ধরনের সম্পর্কের জন্য জ্যামিতিক ভিত্তি রয়েছে। স্টায়েলটিস সমাকলন

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\, F(x)$$

তে যদি $F(x)$ কে ফাংশন $H(x)$ ধরে নেয়া হয় তবে আমরা দেখতে পাই, যে কোনো সমাকলনযোগ্য ফাংশন $f(x)$ এর জন্য

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\, H(x) = f(0) \qquad (১.৬৩)$$

সমীকরণ (১.৬৩) এবং (১.৫৪) তুলনা করে $H(x)$ এবং $\delta(x)$ এর মধ্যে উক্ত সম্পর্ক পাওয়া যায়।

১.১১ উল্লাম্বিক ফাংশন (Orthogonal functions)

বিশেষ ধর্মীয় ফাংশনের তত্ত্বের ক্ষেত্রে কতকগুলি ক্রম-ফাংশন

$$\phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \phi_3(x),\ \cdots\cdots,\ \phi_n(x),\ \phi_{n+1}(x),\ \cdots\cdots$$

দেখা যায় যাদের ধর্ম হলো

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0,\ (m \neq n) \qquad (১.৬৪)$$

এ ক্ষেত্রে ফাংশন $\phi_r(x)$, $(r = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ গুলিকে ব্যবধান (a, b) এর উপর উল্লাম্বিক (orthogonal) ফাংশন বলে। এ ছাড়া যদি ফাংশনগুলি এমন হয় যে, n এর সকল মানের জন্য,

$$\int_a^b \{\phi_n(x)\}^2 dx = 1 \qquad (১.৬৫)$$

তখন ক্রম-ফাংশনগুলিকে নরমালাইজড (normalised) ফাংশন বলে। যদি কোনো ফাংশনের জন্য শর্ত (১.৬৪) এবং (১.৬৫) প্রযোজ্য হয় তবে ফাংশনগুলিকে

অর্থনরমাল (orthonormal) ফাংশন বলা হয়। যখন উল্লাম্বিক ফাংশনের কোনো সেট দেয়া থাকে তখন সেগুলিকে নরমালাইজড করে নিলেই অর্থনরমাল ফাংশন সহজেই পাওয়া যায়।

অপরপক্ষে যদি ফাংশনের ধর্ম এমন হয় যে, $\psi(x)$ এমন একটি ফাংশন যা সমাকলনযোগ্য নয় এবং যার মান শূন্য নয়; তাহলে n এর সকল মানের জন্য যদি আমরা পাই

$$\int_a^b \psi(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0 \qquad (১.৬৬)$$

সে ক্ষেত্রে ফাংশনগুলিকে পরিপূর্ণ উল্লাম্বিক ফাংশন বলে।

উদাহরণস্বরূপ, ক্রম-ফাংশনগুলি যদি $P_n(x)$ হয় যেখানে লেজেন্ডার বহুপদী $n=0, 1, 2, \cdots$, সেক্ষেত্রে ফাংশন $P_n(x)$ উল্লাম্বিক। এরা নরমালাইজড নয় কিন্তু $P_n(x)$ এর প্রতিটি ফাংশনকে যদি $\sqrt{(n+\frac{1}{2})}$ দ্বারা গুণ করা হয় তাহলে আমরা দেখতে পাই যে ফাংশন

$$\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,P_n(x) \qquad (১.৬৭)$$

ব্যবধান $(-1, 1)$ এর উপর নরমালাইজড হয়। কাজেই (১.৬৭) তে বর্ণিত ফাংশনগুলি অর্থনরমাল।

এছাড়া যদি ব্যবধান $(-\pi, \pi)$ এর উপর ফাংশন $\psi\left(\frac{x}{\pi}\right) P_n\left(\frac{x}{\pi}\right)$ এর জন্য আমরা ফুরিয়ার সংজ্ঞা বিবেচনা করি তাহলে যদি এটি (১.৬৬) সিদ্ধ করে তবে এই ফাংশনকে নাল (null) ফাংশন বলে। কাজেই $(-1, 1)$ ব্যবধানের উপর $\psi(x)$ হলো একটি নাল ফাংশন। ফলে এটি প্রমাণ করা যায় যে, (১.৬৭) তে বর্ণিত ফাংশনগুলি পরিপূর্ণ অর্থনরমাল ফাংশন।

প্রশ্নমালা

১। প্রমাণ কর:

$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1.\ 3.\ 5\cdots(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}$$

২। দেখাও যে,

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2}$$

৩। দেখাও যে,

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$$

৪। প্রমাণ কর :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$$

৫। প্রমাণ কর :

$$\frac{d^n \Gamma(y)}{dy^n} = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} (\log y)^n \, dx$$

৬। প্রমাণ কর যে, যখন s পূর্ণ সংখ্যা এবং a ভগ্নাংশ,

$$\Gamma(a-s) = (-1)^s \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a+s)}$$

৭। প্রমাণ কর :

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1}\,dt}{(1+t)^{m+n}} = B(m,n)\,,\ (m, n > 0)$$

এবং এ থেকে দেখাও যে,

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\tan\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

৮। প্রমাণ কর :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

দ্বিতীয় অধ্যায়

অধিজ্যামিতিক ফাংশন

(Hypergeometric Function)

২.১ অধিজ্যামিতিক সিরিজ

নিম্নের সিরিজ

$$1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots + \infty \qquad (২.১)$$

গণিতশাস্ত্রে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। উক্ত সিরিজ থেকে $\alpha = 1$ এবং $\beta = \gamma$ হলে জ্যামিতিক সিরিজ

$$1 + x + x^2 + \cdots + \infty \qquad (২.২)$$

পাওয়া যায়। কাজেই জ্যামিতিক সিরিজ (২.২) এর সাধারণীকরণ বলে (২.১) কে অধিজ্যামিতিক সিরিজ বলে। যখন $\gamma \neq 0$ অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা নয় তখন সিরিজ (২.১) পরম অভিসারী হবে যদি $|x| < 1$ হয়, পরম অপসারী হবে যদি $|x| > 1$ হয় এবং $|x| = 1$ হলে তা পরম অভিসারী হবে যদি $\gamma > \alpha + \beta$ হয়। এছাড়াও এটি $x = -1$ এর জন্য অভিসারী হবে যদি $\gamma > \alpha + \beta - 1$ হয়।

আমরা সিরিজ (২.১) কে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করতে পারি :

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r (\beta)_r}{r!(\gamma)_r} x^r \qquad (২.৩)$$

যেখানে $(\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+r-1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$ (২.৪)

এখানে ${}_2F_1$ এর অর্থ হলো উপরে α, β ধরনের দুটি চলক এবং নিচে γ ধরনের একটি চলক সিরিজটিতে বর্তমান। ${}_2F_1$ দ্বারা অধিজ্যামিতিক ফাংশন বুঝায় যেমন F দ্বারা যে কোনো ফাংশনকে বুঝায়। সাধারণ ফাংশন F থেকে আলাদা করার জন্য অধিজ্যামিতিক ফাংশনকে ${}_2F_1$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখন (২.৩) থেকে আমরা দেখতে পাই যে

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; x) \qquad (২.৫)$$

আমরা (২.৩) থেকে আরো দেখতে পাই যে

$$\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(r-1)!(\gamma)_r}\, x^{r-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{r+1}(\beta)_{r+1}}{r!(\gamma)_{r+1}}\, x^r$$

কিন্তু $(\alpha)_{r+1} = \alpha(\alpha+1)_r$, কাজেই ডানপক্ষকে নিম্ন আকারে লেখা যায় :

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_r(\beta+1)_r}{r!(\gamma+1)_r}\, x^r$$

ফলে আমরা নিম্নের ফল পাই :

$$\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\,{}_2F_1(\alpha+1,\ \beta+1;\gamma+1;x) \qquad (২.৬)$$

আরো দেখা যায় যে (২.৩)-এ $x = 0$ বসালে দাঁড়ায়

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;0) = 1 \qquad (২.৭)$$

যার ফলে পাওয়া যায়

$$\left[\frac{d}{dx}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)\right]_{x=0} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \qquad (২.৮)$$

এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে, অধিজ্যামিতিক সিরিজ কোথাও থেমে যেতে পারে এবং কিছু সংখ্যক পদ শূন্য হওয়ার পর আবার তা চলতে পারে। উদাহরণস্বরূপ আমরা অধিজ্যামিতিক সিরিজ ${}_2F_1(-n, b; -n-m; x)$ কে বিবেচনা করতে পারি যেখানে m এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং b শূন্য অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা নয়। যেহেতু এর লবে $(-n)_r$ আছে, কাজেই $(n+1)$ পদ পর উক্ত সিরিজ-বিস্তার শূন্য হয়ে যাবে। কিন্তু

$$\frac{(-n)_r}{(-n-m)_r} = \frac{n!}{(n+m)!}(n+m-r)(n+m-r-1)\cdots(n-r+1)$$

যেখানে বামপক্ষের মান $\frac{0}{0}$ আকার নয়। তাহলে আমরা লিখতে পারি যে, যেখানে বামপক্ষ অনির্ধারিত হওয়া সত্ত্বেও এর মান আছে, সেখানে

$$
{}_2F_1(-n, b; -n-m; x)
$$

$$
= \sum_{r=0}^{\infty} \left(1 - \frac{r}{n+m}\right)\left(1 - \frac{r}{n+m-1}\right) \cdots \cdots
$$

$$
\left(1 - \frac{r}{n+1}\right) \frac{(b)_r}{r!}\, x^r \tag{২.৯}
$$

(২.৯) থেকে দেখা যায় যে, যদিও এটি n পদে থেমে যায় তার পরেও $(n+m+1)$ পদ থেকে এটি পুনরায় চলতে শুরু করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে নিম্নোক্ত সিরিজটি অনুরূপ :

$$
{}_2F_1(-2, 1; -5; x)
$$

$$
= 1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{10}x^6 - \frac{2}{5}x^7 - x^8 + \cdots \cdots
$$

২.২ সমাকলন সূত্র

অধিজ্যামিতিক সিরিজের বহু ধর্ম এর সমাকলন সূত্র থেকে জানা যায়। সে কারণে এর সমাকলন সূত্র নির্ণয় একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। আমরা দেখতে পাই যে, যেখানে B বিটা ফাংশন নির্দেশ করে, যে

$$
\frac{(\beta)_r}{(\gamma)_r} = \frac{B(\beta + r, \gamma - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)}
$$

$$
= \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma - \beta - 1}\, t^{\beta + r - 1}\, dt \tag{২.১০}
$$

এটি থেকে পাওয়া যায়

$$
{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r x^r}{r!}
$$

$$
\times \int_0^1 (1-t)^{\gamma - \beta - 1}\, t^{\beta + r - 1}\, dt \tag{২.১১}
$$

এর সমষ্টি এবং সমাকলনের ক্রম পরস্পর পরিবর্তন করে পাওয়া যায় :

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} \times \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!} (xt)^r \right\} dt \qquad (২.১২) $$

অথবা $$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\beta-1} t^{\beta-1} \times (1-xt)^{-\alpha} dt \qquad (২.১৩) $$

যেখানে $$ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r}{r!} (xt)^r = (1-xt)^{-\alpha} \qquad (২.১৪) $$

সম্পর্ক (২.১৩) কে সমাকলন সূত্র বলে যা $|x| < 1$, $\gamma > \beta > 0$ এর জন্য প্রযোজ্য। উক্ত সম্পর্কটি x জটিল হলেও প্রযোজ্য হবে যদি $(1-xt)^{-\alpha}$ এমন হয় যে, $(1-xt)^{-\alpha} \to 1$ যখন $t \to 0$ এবং $R_e(\gamma) > R_e(\beta) > 0$ হয়। এখানে R_e বাস্তব।

২.৩ সমাকলন সূত্রের প্রয়োগ

সম্পর্ক (২.১৩) তে যদি $x = 1$ বসানো যায় তবে

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} t^{\beta-1} dt $$

$$ = \frac{B(\beta, \gamma-\alpha-\beta)}{B(\beta, \gamma-\beta)} \qquad (২.১৫) $$

যদি $\gamma-\beta-\alpha > 0$, $\beta > 0$ হয়।

সম্পর্ক (২.১৫) তে যদি বিটা ফাংশনকে গামা ফাংশনে রূপান্তর করা যায় তবে গাউসের উপপাদ্য থেকে পাওয়া যায় :

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad (২.১৬) $$

যদি $\alpha = -n$ একটি ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে

$$ \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} = (\gamma-\beta)_n \; ; \; \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} = (\gamma)_n $$

সেক্ষেত্রে (২.১৬) কে নিম্নের ফাংশনে প্রকাশ করা যায় :

$$ {}_2F_1(-n, \beta ; \gamma ; 1) = \frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \qquad (২.১৭) $$

যা ভেন্ডারমন্ড উপপাদ্য নামে পরিচিত।

আবার যদি (২.১৩) তে $x = -1$ এবং $\alpha = 1 + \beta - \gamma$ বসানো যায় তবে পাওয়া যায়,

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \beta-\alpha+1 ; -1) $$

$$ = \frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-t^2)^{-\alpha} t^{\beta-1}\, dt \qquad (২.১৮) $$

এখন যদি $t^2 = z$ লেখা যায় তখন আমরা দেখি যে, সমাকলনের মান হয় $\frac{1}{2}B(\frac{1}{2}\beta, 1-\alpha)$। আবার আমরা জানি

$$ \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1+\beta)} \qquad (২.১৯) $$

কাজেই সমাকলনের মান এবং (২.১৯) ব্যবহার করে (২.১৮) থেকে পাওয়া যায় :

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \beta-\alpha+1 ; -1) = \frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta-\alpha)} \qquad (২.২০) $$

যা কুমার উপপাদ্য (Kummer's theorem) নামে পরিচিত।

এছাড়া (২.১৩) থেকে নিম্নের সম্পর্ক নির্ণয় করা যায়,

যখন $u = 1 - t$ এবং

$$ \{1 - x(1-u)\}^{-\alpha} = (1-x)^{-\alpha}\left\{1 - \frac{x}{x-1}\right\}^{\alpha} $$

তখন আমরা পাই

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma : x) = \frac{(1-x)^{-\alpha}}{B(\beta, \gamma-\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\beta-1} \; u^{\gamma-\beta-1} $$

$$ \times \left\{1 - \frac{x}{x-1}u\right\}^{-\alpha} du $$

$$ = \frac{(1-x)^{-\alpha}}{B(\beta, \gamma-\beta)} B(\gamma-\beta, \beta) \; {}_2F_1\left(\alpha, \gamma-\beta ; \gamma ; \frac{x}{x-1}\right) $$

অর্থাৎ

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x) = (1-x)^{-\alpha} \; {}_2F_1\left(\alpha, \gamma-\beta ; \gamma ; \frac{x}{x-1}\right) \quad (২.২১) $$

অনুরূপভাবে পাওয়া যায়,

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x) = (1-x)^{-\beta} \; {}_2F_1\left(\gamma-\alpha, \beta ; \gamma ; \frac{x}{x-1}\right) \quad (২.২২) $$

এখন (২.৫) এর ধর্ম (২.২১)-এ ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$ {}_2F_1\left(\alpha, \gamma-\beta ; \gamma ; \frac{x}{x-1}\right) = {}_2F_1\left(\gamma-\beta, \alpha ; \gamma ; \frac{x}{x-1}\right) $$

$$ = (1-x)^{\gamma-\beta} \; {}_2F_1(\gamma-\beta, \gamma-\alpha ; \gamma ; x) \quad (২.২৩) $$

যার ফলে আমরা পাই

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \; {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta ; \gamma ; x) \quad (২.২৪) $$

আমরা (২.২১)-এ $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; \tfrac{1}{2}) = 2^{\alpha} \; {}_2F_1(\alpha, \gamma-\beta ; \gamma, -1) \quad (২.২৫) $$

এই সমীকরণের ডানপক্ষের সিরিজ (২.২০) ব্যবহার করে নির্ণয় করা যায় যদি

$$ \gamma = \gamma - \beta - \alpha + 1 \quad \text{অর্থাৎ} \quad \beta = 1 - \alpha $$

অথবা $\gamma = \alpha - (\gamma - \beta) + 1$ অর্থাৎ $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)$ হয়।

এক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রগুলি পাওয়া যায় :

$$ {}_2F_1(\alpha, 1-\alpha ; \gamma ; \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)} \quad (২.২৬) $$

$$
{}_2F_1\left(\alpha, \beta\,;\ \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)
= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\right)} \qquad (২.২৭)
$$

২.৪ অধিজ্যামিতিক অন্তরক সমীকরণ (Hypergeometric differential equation)

অধিজ্যামিতিক অন্তরক সমীকরণ হলো

$$
(x^2 - x)y'' + [(1+\alpha+\beta)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0 \qquad (২.২৮)
$$

যেখানে α, β, γ ধ্রুবক এবং এটি ধরে নেয়া হয় যে, γ ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা নয়। সমীকরণ (২.২৮) কে সাধারণ অন্তরক সমীকরণ হিসেবে লিখলে দাঁড়ায়

$$
y'' + Q\,y' + R\,y = 0 \qquad (২.২৯)
$$

যেখানে $\quad Q = \dfrac{(1+\alpha+\beta)x - \gamma}{x(x-1)}\ ,\quad R = \dfrac{\alpha\beta}{x(x-1)}$

এ থেকে আমরা দেখতে পাই,

$$Q \to \infty \quad \text{যখন} \quad x = 0,\quad x = 1,\quad x = \infty$$

$$R \to \infty \quad \text{যখন} \quad x = 0,\quad x = 1$$

যা থেকে পাওয়া যায় $\quad x = 0 \quad$ এবং $\quad x = 1,\ x = \infty$

ব্যতিক্রমী বিন্দু। এই বিন্দুগুলি $(x^2 - x) = 0$ এর মূল

এবং $\qquad (x^2 - x)Q = [(1+\alpha+\beta)x - \gamma]\,,$

$$(x^2 - x)^2 R = \alpha\beta(x^2 - x)$$

এর মান x এর উপরিউক্ত যে কোনো মানের জন্য সসীম। কাজেই উক্ত বিন্দুগুলি নিয়মিত ব্যতিক্রমী বিন্দু। ফলে অধিজ্যামিতিক অন্তরক সমীকরণ (২.২৮) এর সিরিজ সমাধান করা যাবে উক্ত ব্যতিক্রমী বিন্দুগুলির সাপেক্ষে। আমরা নিচের ধারা মতে সমাধান নির্ণয় করব :

(ক) যখন $x = 0$

মনে করি উক্ত সমীকরণের সমাধান হলো

$$
y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\, x^{k+r} \qquad (২.৩০)
$$

যা থেকে আমরা পাই

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(k+r)x^{k+r-1};$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(k+r)(k+r-1)\,x^{k+r-2}$$

এই মানগুলি (২.২৮)-এ স্থাপন করে এবং কিছু পুনর্বিন্যাস করে পাওয়া যায়

$$\sum_{r=0}^{\infty} (k+r)^2 + \{(\alpha+\beta)(k+r)+\alpha\beta\}\,a_r\,x^{k+r}$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r+\gamma-1)a_r\,x^{k+r-1} = 0 \qquad (২.৩১)$$

এখানে r এর সকল মানের জন্য (২.৩১) সিদ্ধ হয়। ফলে x এর সর্বনিম্ন ঘাতের সহগ অর্থাৎ x^{k-1} এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে সূচক সমীকরণ পাওয়া যায়

$$k(k+\gamma-1) = 0$$

সূচক সমীকরণের মূলগুলি হলো

$$k=0,\quad k=1-\gamma \qquad (২.৩২)$$

বিবেচনা ১ ঃ যখন $k=0$ তখন (২.৩১) থেকে x^{k+r} এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায়

$$[r^2+(\alpha+\beta)r+\alpha\beta]\,a_r = (r+1)(r+\gamma)a_{r+1}$$

অথবা $$a_{r+1} = \frac{(\alpha+r)(\beta+r)}{(r+1)(r+\gamma)}a_r \qquad (২.৩৩)$$

যা পৌনঃপুনিক সম্পর্ক। এখন এতে $r=0, 1, 2, \cdots$ বসিয়ে আমরা পাই

$$a_1 = \frac{\alpha\beta}{\gamma}a_0$$

$$a_2 = \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}a_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}a_0$$

$$a_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\, a_0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+k-1)}{1.2.3.\cdots\cdots k\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots\cdots(\gamma+k-1)}\, a_0$$

$$= \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\,(\gamma)_k}\, a_0$$

যেখানে $(\alpha)_k$, ⋯ সমীকরণ (২.8) অনুসারে পাওয়া যাবে। কাজেই সমীকরণ (২.২৮) এর একটি সমাধান হলো

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\,(\gamma)_k} x^k \qquad (২.৩৪)$$

যদি $a_0 = 1$ হয় , তবে (২.৩৪) থেকে পাওয়া যায়

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\,(\gamma)_k} x^k \qquad (২.৩৫)$$

যা নির্দিষ্ট সমাধান। এই সিরিজকে অধিজ্যামিতিক সিরিজ বলে , কারণ $\alpha = 1$ $\beta = \gamma$ হলে (২.৩৫) থেকে জ্যামিতিক সিরিজ পাওয়া যায় যা হলো

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \infty$$

সাধারণত অধিজ্যামিতিক সিরিজ (২.৩৫) কে ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ফাংশন ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ কে অধিজ্যামিতিক ফাংশন বলে। ফলে আমরা পাই

$$y = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) \qquad (২.৩৬)$$

বিবেচনা ২ ঃ যখন $k = 1 - \gamma$, তখন (২.৩১) থেকে $x^{1-\gamma+r}$ এর সহগ শূন্যের সমান করে এবং কিছু পুনর্বিন্যাস করে পাওয়া যায় ,

$$a_{r+1} = \frac{(\alpha+1-\gamma+r)(\beta+1-\gamma+r)}{(r+1)(r+2-\gamma)}\, a_r \qquad (২.৩৭)$$

যা আর একটি পৌনঃপুনিক সূত্র। মনে করি

$$\alpha_1 = \alpha - \gamma + 1\ ,\ \beta_1 = \beta - \gamma + 1 \text{ এবং } \gamma_1 = 2 - \gamma$$

তাহলে পৌনঃপুনিক সূত্রটি দাঁড়ায়

$$a_{r+1} = \frac{(\alpha_1 + r)(\beta_1 + r)}{(r+1)(r+\gamma)} a_r \qquad (২.৩৮)$$

কাজেই যখন $k = 1 - \gamma$ তখন আমরা পাই

$$a_1 = \frac{\alpha_1 . \beta_1}{1 . \gamma_1} a_0$$

$$a_2 = \frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)\beta_1(\beta_1 + 1)}{1.2.\gamma_1(\gamma_1 + 1)} a_0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_k = \frac{(\alpha_1)_k\ (\beta_1)_k}{k!\ (\gamma_1)_k} a_0$$

কাজেই (২.২৮) এর আর একটি সমাধান হলো

$$y = a_0\, x^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k(\beta_1)_k}{k!(\gamma_1)_k} x^k$$

$$= a_0\, x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(\alpha_1\, , \beta_1\ ;\ \gamma_1 ;\ x)$$

$$= a_0\, x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1\, , \beta - \gamma + 1\ ;\ 2 - \gamma ;\ x) \qquad (২.৩৯)$$

এখানে $\gamma = 1$ বা এর মান ঋণাত্মক হওয়া চলবে না। তাহলে দুটি সমাধান আলাদা হবে না বরং একই হবে। কারণ হিসেবে দেখানো যায় যে,

যদি $\gamma = 1$ হয় তবে

$${}_2F_1(\alpha - \gamma + 1\, , \beta - \gamma + 1\ ;\ -\gamma + 2\ ;\ x) = {}_2F_1(\alpha, \beta ;\ 1 ;\ x)$$

যেখানে $\quad {}_2F_1(\alpha\, , \beta\ ;\ \gamma\ ;\ x) = {}_2F_1(\alpha,\ \beta ;\ 1\ ;\ x)$

কাজেই উভয় সিরিজ একই।

যদি γ ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে মনে করি $\gamma = -n$, তাহলে

$$(-n)_k = (-n)(-n+1)(-n+2) \cdots \cdots 0.1.2 \cdots (-n+k-1)$$

$$= 0$$

ফলে
$$a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (-n)_k} a_0 = \infty$$

এবং এক্ষেত্রে সমাধান পাওয়া যাবে না। অতএব যখন $k=0$ এবং $k=1$, যেখানে $\gamma \neq 1$ বা γ ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা নয় তখন সমীকরণ (২.২৮) এর দুটি সমাধান যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল। ফলে (২.২৮) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y = A\ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) + B x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \qquad (২.৪০)$$

যেখানে A এবং B যে কোনো ধ্রুবক। এই সিরিজটি $|x| < 1$ এর জন্য অভিসারী অর্থাৎ $(-1, 1)$ ব্যবধানে অভিসারী।

(খ) যখন $x = 1$

এ ক্ষেত্রে আমরা মনে করি

$$z = 1 - x$$

তাহলে সমীকরণ (২.২৮) থেকে পাওয়া যায়

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \{\alpha+\beta-\gamma+1-(\alpha+\beta+1)z\}\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0 \qquad (২.৪১)$$

এই সমীকরণ এবং সমীকরণ (২.২৮) একই, কেবল γ এর পরিবর্তে $\alpha+\beta-\gamma+1$ এবং x এর পরিবর্তে $1-x$ রয়েছে। কাজেই এর সমাধান (২.৪০) এর অনুরূপ। ফলে সমীকরণ (২.৪১) এর সমাধান হলো, যেখানে সূচক সমীকরণের মূলগুলি 0 এবং $\gamma-\alpha-\beta$,

$$y = A\ {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$$

$$+ B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\ {}_2F_2(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x) \qquad (২.৪২)$$

এখানে A এবং B যে কোনো ধ্রুবক। এই সিরিজটি $(0, 2)$ ব্যবধানে অভিসারী, অর্থাৎ $|1-x| \leq 1$ এর জন্য অভিসারী।

(গ) যখন $x = \infty$

এখানে ব্যতিক্রমী বিন্দু হলো অসীমে। কাজেই সমীকরণ (২.২৮) এর সিরিজ সমাধানের জন্য আমরা ধরে নিব $x = \frac{1}{u}$, তাহলে সমীকরণ (২.২৮) দাঁড়ায়

$$u^2(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + [2u(1-u) - (1+\alpha+\beta)u + \gamma u^2]\frac{dy}{du} + \alpha\beta y = 0 \qquad (২.৪৩)$$

মনে করি এর সিরিজ সমাধান হলো

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \qquad (২.৪৪)$$

ফলে (২.৪৩) থেকে পাওয়া যায়,

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1)+(2-1-\alpha-\beta)(k+r)+\alpha\beta]a_r u^{k+r}$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1)-(2-\gamma)(k+r)]\, a_r u^{k+r+1} = 0$$

এখন u এর সর্বনিম্ন ঘাতের সহগ শূন্যের সাথে সমান করে আমরা পাই

$$k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta=0$$

যার ফলে পাওয়া যায়,

$$k=\alpha, \beta \qquad (২.৪৫)$$

এবং u^{k+r} এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায় নিম্নের পৌনঃপুনিক সম্পর্ক :

$$a_{r+1} = -\frac{(r+\alpha)(r+\alpha-\gamma+1)}{(r+1)(r+\alpha-\beta+1)}\, a_r \qquad (২.৪৬)$$

যা থেকে সমস্ত সহগ নির্ণয় করা যাবে। ফলে যদি $a_0 = 1$ হয়, তখন (২.২৮) এর সমাধান দুটি হবে

$$y_1 = x^{-\alpha}\, {}_2F_1\left(\alpha, \alpha-\gamma+1; \alpha-\beta+1; \frac{1}{x}\right) \qquad (২.৪৭)$$

যখন $k=\alpha$,

$$y_2 = x^{-\beta}\, {}_2F_1\left(\beta, \beta-\gamma+1; \beta-\alpha+1; \frac{1}{x}\right) \qquad (২.৪৮)$$

যখন $k=\beta$

অতএব সমীকরণ (২.২৮) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y = A\, y_1 + B\, y_2 \qquad (২.৪৯)$$

যেখানে A, B যে কোনো ধ্রুবক। এই সিরিজটি (0, 1)-এ অভিসারী অর্থাৎ,

$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ এর জন্য অভিসারী।

অতএব অধিজ্যামিতিক সমীকরণের সমাধান নিম্নের বিষয়ভিত্তিক নির্ণয় করা হয়েছে :

(ক) নিয়মিত ব্যতিক্রমী বিন্দু $x = 0$, যেখানে সূচক সমীকরণের মূল হলো 0 এবং $1 - \gamma$

(খ) নিয়মিত ব্যতিক্রমী বিন্দু $x = 1$, যেখানে সূচক সমীকরণের মূল হলো 0 এবং $\gamma - \alpha - \beta$

(গ) নিয়মিত ব্যতিক্রমী বিন্দু $x = \infty$, যেখানে সূচক সমীকরণের মূল হলো α এবং β

অধিজ্যামিতিক অন্তরক সমীকরণের সাধারণ সমাধানগুলি নিম্নের প্রতীকি পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয় :

$$y = P \begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & x \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{Bmatrix} \qquad (২.৫০)$$

এখানে (২.৫০) এর ডানপক্ষের প্রতীককে উক্ত সমীকরণের রিম্যান P ফাংশন বলে।

২.৫ সমাধানগুলির মধ্যে পার্থক্য

মনে করি $_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = A\,_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-x)$

$$+B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x) \qquad (২.৫১)$$

এখন $x = 0$ বসিয়ে (২.৫১) থেকে আমরা পাই

$$1 = A\,_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1)$$
$$+ B\,_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1) \qquad (২.৫২)$$

এবং $x = 1$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1 = A \qquad (২.৫৩)$$

যদি আমরা ধরে নেই যে

$$1 > \gamma > \alpha + \beta \qquad (২.৫৪)$$

তাহলে (২.১৬) এবং (২.৫৩) থেকে পাওয়া যায়

$$A = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \qquad (২.৫৫)$$

এবং (২.৫২) থেকে (২.১৬) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$1 = A\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + B\,\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}$$

ফলে A এর মান (২.৫৫) থেকে উক্ত সম্পর্কে বসিয়ে পাওয়া যায়, B এর মান যা হলো

$$B = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \qquad (২.৫৬)$$

কাজেই আমরা পাই

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \alpha+\beta-\gamma+1 ; 1-x) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \\ &\quad {}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta ; \gamma-\alpha-\beta+1 ; 1-x) \end{aligned} \qquad (২.৫৭)$$

যা (২.৫৪) শর্ত সাপেক্ষে সিদ্ধ এবং $0 < x < 1$

যদি (২.৫৭) তে x এর পরিবর্তে $\frac{1}{x}$ লেখা যায় তবে আমরা পাই

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\alpha, \beta ; \gamma ; \frac{1}{x}\right) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\ {}_2F_1\left(\alpha, \beta ; \alpha+\beta-\gamma+1 ; 1-\frac{1}{x}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} \\ &\quad {}_2F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta ; \gamma-\alpha-\beta+1 ; 1-\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \qquad (২.৫৮)$$

এবং (২.২১) থেকে পাওয়া যায়

$${}_2F_1\left(\alpha, \beta ; \gamma ; 1-\frac{1}{x}\right) = x^{\alpha}\ {}_2F_1(\alpha, \gamma-\beta ; \gamma ; 1-x) \qquad (২.৫৯)$$

ফলে আমরা নিচের ফাংশন পাই :

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(\alpha, \beta ; \gamma ; \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\,x^{\alpha}\ {}_2F_1(\alpha, \alpha-\gamma+1 ; \alpha+\beta-\gamma+1 ; 1-x) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\beta}\,(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} \end{aligned}$$

$${}_2F_1(\gamma-\alpha,\ 1-\alpha\ ;\ \gamma-\alpha-\beta+1\ ;\ 1-x) \qquad (২.৬০)$$

এখানে $1<x<2$ এবং $1>\gamma>\alpha+\beta$

উপরিউক্ত সম্পর্কগুলি অধিজ্যামিতিক অন্তরক সমীকরণের সমাধানগুলির মধ্যে বহু সম্পর্কের কয়েকটি মাত্র। যদি সমীকরণ (২.২৮) এ অনির্ভরশীল চলক নিম্নের যে কোনো চলক

$$1-x\ ,\ \frac{1}{x}\ ,\ \frac{1}{1-x}\ ,\ \frac{x-1}{x}\ ,\ \frac{x}{x-1}$$

দ্বারা পরিবর্তন করা যায় তাহলে সমীকরণটি একই ধরনের সমীকরণে রূপান্তরিত হয়।

২.৬ কয়েকটি মৌলিক ফাংশনকে অধিজ্যামিতিক ফাংশনে প্রকাশ

অধিজ্যামিতিক ফাংশন থেকে তার চলক α, β, γ এবং x এর উপযুক্ত পরিবর্তন করে গণিত শাস্ত্রের অনেক মৌলিক ফাংশন পাওয়া যায়। নিম্নে এ ধরনের কয়েকটি উদাহরণ দেয়া হলো :

(i) অধিজ্যামিতিক ফাংশন ${}_2F_1(\alpha,\ \beta\ ;\ \gamma\ ;\ x)$-এ যদি α অথবা β ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে কিছু সংখ্যক পদ পরে তা থেমে যাবে, যারফলে বহুপদী পাওয়া যাবে। উদাহরণস্বরূপ যদি $\beta=0$ হয়, তবে

$${}_2F_1(\alpha,\ \beta\ ;\ \gamma\ ;\ x)={}_2F_1(\alpha,\ 0\ ;\ \gamma\ ;\ x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma(\gamma+1)}x+\cdots=1 \qquad (২.৬১)$$

আমরা (২.২১) থেকে আরেকটি ফাংশন পাই যা হলো

$${}_2F_1(\alpha,\ \beta\ ;\ \gamma\ ;\ x)=(1-x)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\ \gamma-\beta\ ;\ \gamma\ ;\ \frac{x}{x-1}\right)$$

এখানে $\gamma=\beta$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$${}_2F_1(\alpha,\ \beta\ ;\ \beta\ ;\ x)=(1-x)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\ 0\ ;\ \beta\ ;\ \frac{x}{x-1}\right)=(1-x)^{-\alpha} \qquad (২.৬২)$$

মনে করি $\gamma=\beta=1$ এবং $\alpha=-n$, তাহলে (২.৬২) থেকে পাওয়া যায়

$${}_2F_1(-n,\ 1\ ;\ 1\ ;\ x)=(1-x)^{n} \qquad (২.৬৩)$$

আবার ${}_2F_1(1,\ 1\ ;\ 1\ ;\ -x)=(1+x)^{-1}$ যখন $\alpha=1$ এবং $x=-x$

যদি $\alpha=\frac{1}{2}$ হয় তবে (২.৬২) থেকে পাওয়া যায়

$${}_2F_1(\tfrac{1}{2}\ ,\ 1\ ;\ 1\ ,\ x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}} \qquad (২.৬৪)$$

আবার ${}_2F_1\ (1,\ 1\ ;\ 1\ ;\ x)=(1-x)^{-1}$ যখন $\alpha=1$

যদি $\alpha = -n$, $\gamma = \beta = 1$ এবং $x = 1 - x$ ধরা হয় তবে

$$_2F_1(-n, 1; 1, 1-x) = x^n \qquad (২.৬০)$$

অধিজ্যামিতিক ফাংশনে বিশেষ বিবেচনা করে এ ধরনের আরো যৌগিক ফাংশন পাওয়া যাবে।

(ii) উপবৃত্তাকার সমাকলন : প্রথম এবং দ্বিতীয় পর্যায়ের উপবৃত্তাকার সমাকলনগুলি হলো যথাক্রমে

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2\sin^2\theta}} \qquad (২.৬১)$$

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2\sin^2\theta}\, d\theta \qquad (২.৬২)$$

উভয় ফাংশনকেই অধিজ্যামিতিক ফাংশনে প্রকাশ করা যায়। নমুনা হিসেবে দেখা যায় যে,

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - x^2\sin^2\theta)^{-1/2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sum_n \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdots \cdots \left(\frac{1}{2}+n-1\right) x^{2n} \sin^{2n}\theta\, d\theta$$

$$= \sum_n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} x^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\, d\theta$$

$$= \sum_n \frac{(\frac{1}{2})_n x^{2n}}{n!} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \sum_n \frac{(\frac{1}{2})_n x^{2n}}{n!} \cdot \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n(\frac{1}{2})_n}{(1)_n\, n!}(x^2)^n$$

$$= \frac{\pi}{2}\, {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; x^2\right) \qquad (২.৬৮)$$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে,

$$E(x) = \frac{\pi}{2}\, {}_2F_1\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1; x^2\right) \qquad (২.৬৯)$$

২.৭ প্রবহ অধিজ্যামিতিক ফাংশন (Confluent hypergeometric function)

যদি অধিজ্যামিতিক সমীকরণ (২.২৮) এর x কে x/β দ্বারা অপসারণ করা হয় তবে অধিজ্যামিতিক ফাংশন ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta)$ নিচের অন্তরক সমীকরণ

$$x\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{\gamma-\left(1+\frac{\alpha+1}{\beta}\right)x\right\}\frac{dy}{dx}-\alpha y=0 \qquad (২.৭০)$$

কে সিদ্ধ করে। এখন যদি $\beta \to \infty$ হয় তখন আমরা দেখি যে, ফাংশন

$$\underset{\beta \to \infty}{\mathrm{Lt}}\ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x/\beta) \qquad (২.৭১)$$

অন্তরক সমীকরণ

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0 \qquad (২.৭২)$$

এর সমাধান হয়।

আমরা আরো দেখতে পাই যে,

$$\underset{\beta \to \infty}{\mathrm{Lt}}\ \frac{(\beta)_r}{\beta^r}=1$$

কাজেই এক্ষেত্রে ফাংশন (২.৭১) হবে নিচের সিরিজ :

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{(\gamma)_r}\cdot\frac{x^r}{r!} \qquad (২.৭৩)$$

এই ফাংশন ${}_1F_1(\alpha; \gamma; x)$ কে প্রবহ অধিজ্যামিতিক ফাংশন বলে এবং সমীকরণ (২.৭২) কে প্রবহ অধিজ্যামিতিক সমীকরণ বলে।

সমীকরণ (২.৭২) এর সরাসরি সিরিজ সমাধান নির্ণয় করা যায়। এখানে $x = 0$ হলো নিয়মিত ব্যতিক্রমী বিন্দু। কাজেই মনে করি এই বিন্দুর সাপেক্ষে (২.৭২) এর সিরিজ সমাধান হলো

$$y=\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \qquad (২.৭৪)$$

ফলে (২.৭২) থেকে পাওয়া যায়

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r[(k+r)(k+r-1)+\gamma(k+r)]\, x^{k+r-1}$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty} a_r[(k+r)+\alpha]\, x^{k+r}=0 \qquad (২.৭৫)$$

এখন x এর সর্বনিম্ন ঘাতের সহগ শূন্যের সাথে সমান করে সূচক সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$k(k-1)+\gamma k=0$$

অথবা $$k(k-1+\gamma)=0$$

অথবা $$k=0,\ k=1-\gamma \qquad (২.৭৬)$$

বিবেচনা ১ : যখন $k=0$, তখন এই মানের ক্ষেত্রে (২.৭৫) থেকে x^r এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায় পৌনঃপুনিক সম্পর্ক :

$$a_{r+1}[r(r+1)+\gamma(r+1)]=a_r(r+\alpha)$$

অথবা $$a_{r+1}=\frac{(r+\alpha)}{(r+1)(r+\gamma)}\,a_r \qquad (২.৭৭)$$

এখন $r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ মান বসিয়ে আমরা পাই

$$a_1=\frac{\alpha a_0}{\gamma}$$

$$a_1=\frac{\alpha(\alpha+1)a_0}{1.2\gamma(\gamma+1)}$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$a_k=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)a_0}{1.2\cdots k\cdots(\gamma+k-1)}=\frac{(\alpha)_k}{k!\,(\gamma)_k}\,a_0$$

ফলে সমীকরণ (২.৭২) এর সমাধান দাঁড়ায়

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!\,(\gamma)_k}\, x^k \qquad (২.৭৮)$$

যখন $a_0 = 1$ তখন আমরা পাই

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!\,(\gamma)_k}\, x^k = {}_1F_1(\alpha, \gamma; x) \qquad (২.৭৯)$$

যা অধিজ্যামিতিক প্রবাহ ফাংশন নামে পরিচিত।

বিবেচনা ২ : যখন $k = 1 - \gamma$ এক্ষেত্রে মনে করি (২.৭২) সমাধান হলো

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} x^{1-\gamma} a_r\, x^r \qquad (২.৮০)$$

তাহলে সমীকরণ (২.৭২) থেকে আমরা পাই

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r[(1-\gamma+r)(r-\gamma)+\gamma(1-\gamma+r)]\, x^{r-\gamma}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r[(1-\gamma+r)+\alpha]\, x^{r-\gamma+1} \qquad (২.৮১)$$

এটি থেকে $x^{r-\gamma+1}$ এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায় পৌনঃপুনিক সূত্র

$$a_{r+1}[(r+2-\gamma)(r+1-\gamma)+\gamma(r+2-\gamma)] = (r+1-\gamma+\alpha)a_r$$

অথবা $$a_{r+1} = \frac{(r+1-\gamma+\alpha)}{(r+1)(r+2-\gamma)}\, a_r \qquad (২.৮২)$$

মনে করি

$$\alpha_1 = \alpha - \gamma + 1, \; \gamma_1 = 2 - \gamma$$

তাহলে (২.৮২) থেকে আমরা পাই

$$a_{r+1} = \frac{r+\alpha_1}{(r+1)\,(r+\gamma_1)}\, a_r \qquad (২.৮৩)$$

যাদেরকে আমরা $a_1, a_2, a_3, \cdots \cdots, a_k$ নির্ণয় করতে পারি। ফলে

$$a_1 = \frac{\alpha_1 a_0}{1 . \gamma_1}$$

$$a_2 = \frac{(1+\alpha_1)\, a_1}{2 . (1+\gamma_1)} = \frac{\alpha_1 (\alpha_1 + 1)\, a_0}{1 . 2 . \gamma_1 (\gamma_1 + 1)}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_k = \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_1+k-1)\, a_0}{1.2.\cdots k.\, \gamma_1(\gamma_1+1)\cdots(\gamma_1+k-1)} = \frac{(\alpha_1)_k\, a_0}{k\,!\,(\gamma_1)_k}$$

কাজেই সমীকরণ (২.৭২) এর দ্বিতীয় সমাধান হলো

$$y = a_0\, x^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k}{k\,!\,(\gamma_1)_k}\, x^k \qquad (২.৮৪)$$

$$= a_0 x^{1-\gamma}\; {}_1F_1(\alpha_1, \gamma_1, x)$$

$$= a_0 x^{1-\gamma}\; {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1,\, 2-\gamma,\, x) \qquad (২.৮৫)$$

যেখানে $\alpha_1 = \alpha - \gamma + 1$, $\gamma_1 = 2 - \gamma$

অতএব সমীকরণ (২.৭২) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y = A\; {}_1F_1(\alpha, \gamma;\, x) + Bx^{1-\gamma}\; {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1,\, 2-\gamma;\, x) \qquad (২.৮৬)$$

যেখানে A এবং B যে কোনো ধ্রুবক।

বিশেষ ক্ষেত্রে যখন $\gamma = 1$ হয় তখন আমরা নিচের সমাধান পাই

$$y_1(x) = {}_1F_1(\alpha\,,\, 1\,;\, x) \qquad (২.৮৬ক)$$

যা (২.৭৩) থেকে $\gamma = 1$ বসিয়ে সরাসরি পাওয়া যায়। এ ক্ষেত্রে দ্বিতীয় সমাধানের জন্য আমরা পাই

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r \qquad (২.৮৬খ)$$

এটি (২.৭২)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{dy_1}{dx} - y_1 + \sum_{r=1}^{\infty} \{(r+1)^2 a_{r+1} - r\, a_r\}\, x^r + a_1 = 0 \qquad (২.৮৬গ)$$

এখন (২.৮৬ক) থেকে y_1 এর মান (২.৮৬খ)-তে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$a_1 = 1-\alpha\,,$$

$$(r+1)^2 a_{r+1} - r\,a_r = (1-\alpha)\,\frac{(\alpha)_r}{r!\,(r+1)!} \qquad (২.৮৬গ)$$

এই পৌনঃপুনিক সম্পর্ক থেকে a_r এর মান পাওয়া যাবে। ফলে এ ক্ষেত্রে সমীকরণ (২.৭২) এর সাধারণ সমাধান হবে

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$$

যেখানে A এবং B যে কোনো ধ্রুবক।

২.৮ প্রবাহ অধিজ্যামিতিক ফাংশনের ধর্ম

(১) অন্তরকরণ : অধিজ্যামিতিক ফাংশনের ন্যায় একেও অন্তরকরণ করে আমরা পাই

$$\frac{d}{dx}\left[{}_1F_1(\alpha\,,\,\gamma\,;\,x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(\alpha)_k}{k!\,(\gamma)_k}\,x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k\,x^{k-1}}{(k-1)!\,(\gamma)_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1}\,x^k}{k!\,(\gamma)_{k+1}}$$

যেহেতু $(\alpha)_{k+1} = \alpha(\alpha+1)_k\,,\ (\gamma)_{k+1} = \gamma(\gamma+1)_k$, কাজেই আমরা পাই

$$\frac{d}{dx}\left[{}_1F_1(\alpha\,,\,\gamma\,;\,x)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)_k\,x^k}{k!\,\gamma(\gamma+1)_k}$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma}\,{}_1F_1(\alpha+1\,,\,\gamma+1\,;\,x) \qquad (২.৮৭)$$

অনুরূপভাবে আরো পাওয়া যায়,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[{}_1F_1(\alpha,\,\gamma\,;\,x)\right] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\,{}_1F_1(\alpha+2\,,\,\gamma+2;\,x) \qquad (২.৮৮)$$

এবং

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[{}_1F_1(\alpha,\,\gamma\,;\,x)\right] = \frac{(\alpha)_r}{(\gamma)_r}\,{}_1F_1(\alpha+r\,,\,\gamma+r\,;\,x) \qquad (২.৮৯)$$

যখন $x = 0$ তখন আমরা নিচের সম্পর্কগুলি পেয়ে থাকি :

$$\left.\begin{aligned} &{}_1F_1(\alpha, \gamma ; 0) = 1 \\ &\frac{d}{dx}\left[{}_1F_1(\alpha, \gamma ; x)\right]_{x=0} = \frac{\alpha}{\gamma} \\ &\frac{d^r}{dx^r}\left[{}_1F_1(\alpha, \gamma ; x)\right]_{x=0} = \frac{(\alpha)_r}{(\gamma)_r} \end{aligned}\right\} \qquad (২.৯০)$$

(২) যদি α ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে কিছুসংখ্যক পদ পর উক্ত সিরিজ থেমে যাবে। অধিজ্যামিতিক সিরিজের মত এর প্রমাণ এক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

(৩) α এর মান ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হওয়ার কারণে প্রবহ অধিজ্যামিতিক সিরিজ কোথাও থেমে গেলেও γ এর মান ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে উক্ত সিরিজ পুনরায় চালু করা যায়।

অধিজ্যামিতিক সিরিজের মত এরও প্রমাণ দেয়া যায়।

(৪) অভিসারী ধর্ম : প্রবহ অধিজ্যামিতিক সিরিজের n-তম পদ হলো

$$u_n = \frac{(\alpha)_n x^n}{(\gamma)_n n!}$$

কাজেই
$$u_{n+1} = \frac{(\alpha)_{n+1} x^{n+1}}{(\gamma)_{n+1}(n+1)!}$$

এখন আমরা দেখতে পাই যে, x এর সকল মানের জন্য

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(\alpha+k)x}{(\gamma+k)(k+1)}\right| \to 0 \text{ যখন } k \to \infty$$

কাজেই x এর সকল মানের জন্য

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$$

হলে প্রবহ অধিজ্যামিতিক সিরিজ অভিসারী।

(৫) সমাকলন সূত্র : আমরা জানি যে

$$\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+k)} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+k)}$$

কিন্তু আমরা জানি যে

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\, dt$$

ফলে আমরা পাই

$$\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+k)}=B(\alpha+k,\ \gamma-\alpha)\int_0^1 t^{\alpha+k-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt$$

$$=\frac{1}{B(\alpha,\ \gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha+k-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt$$

কাজেই এ থেকে পাওয়া যায়,

$${}_1F_1(\alpha,\ \gamma\ ;\ x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k\, x^k}{k\,!\,(\gamma)_k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k\,!}\,\frac{1}{B(\alpha,\ \gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\gamma+k-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt$$

$$=\frac{1}{B(\alpha,\ \gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xt)^k}{k\,!}$$

$$=\frac{1}{B(\alpha,\ \gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{xt}\,t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt \quad (২.৯১)$$

যেখানে $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xt)^k}{k\,!}=\frac{1}{1\,!}+\frac{xt}{2\,!}+\quad+\infty\ \ e^{xt}$$

অথবা

$${}_1F_1(\alpha,\ \gamma\ ;\ x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{xt}\,t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\,dt \quad (২.৯২)$$

এখানে (২.৯১) এবং (২.৯২) হলো প্রথম অধিজ্যামিতিক ফাংশনের সমাকলন সূত্র।

যদি আমরা ধরে নেই যে,

$$t=1-s$$

তাহলে পাওয়া যায়

$$
{}_1F_1(\alpha, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \times \int_0^1 e^{x(1-s)} (1-s)^{\alpha-1} s^{\gamma-\alpha-1}\, ds
$$

$$
= \frac{\Gamma(\gamma)\, e^x}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 e^{-xs} s^{\gamma-\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1}\, ds
$$

$$
= \frac{\Gamma(\gamma)\, e^x}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\, {}_1F_1(\gamma-\alpha, \gamma; -x)
$$

$$
= e^x\, {}_1F_1(\gamma-\alpha, \gamma; -x) \qquad (২.৯৩)
$$

যদি (২.৯২)-এ $x = 0$ বসানো যায় তাহলে পাওয়া যায়,

$$
{}_1F_1(\alpha, \gamma; 0) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1}\, dt
$$

$$
= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\, \beta(\alpha, \gamma-\alpha) = 1 \qquad (২.৯৪)
$$

২.৯ মৌলিক ফাংশনে প্রকাশ

প্রবহ অধিজ্যামিতিক ফাংশন থেকে অনেক মৌলিক ফাংশন নির্ণয় করা যায়। নিচের বিশেষ শর্ত থেকে কয়েকটি উদাহরণ সন্নিবেশিত করা হলো।

(১) ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$ এর সংজ্ঞা (২.৭৯) তে $\gamma = \alpha$ বসিয়ে আমরা দেখতে পাই যে

$$
{}_1F_1(\alpha, \alpha; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k\, x^k}{k!\, (\alpha)_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}
$$

$$
= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \infty = e^x
$$

অথবা $\quad {}_1F_1(\alpha, \alpha; x) = e^x \qquad (২.৯৫)$

(চ) ভ্রম ফাংশন : ভ্রম ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (u)^{2k}}{k!}\, du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x u^{2k}\, du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \, \frac{x^{2k}}{(2k+1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!\,(2k+1)}$$

কিন্তু আমরা দেখতে পাই যে

$$2k+1 = \frac{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 3.1}{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right).(2k+1)}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{2k-3}{2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k}$$

ফলে ভ্রম ফাংশন er f(x) কে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{(\frac{3}{2})_k} \frac{(-x)^{2k}}{k!}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x \; {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2\right) \qquad (২.৯৬)$$

(১) যদি ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$ এর সিরিজ (২.৭৯) তে $\alpha = 1$, $\gamma = 2$ ধরা যায় তবে

$${}_1F_1(1, 2; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k\, x^k}{(2)_k\, k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \infty\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \infty - 1\right)$$

$$= \frac{e^x - 1}{x} \qquad (২.৯৭)$$

আবার, $\alpha = -2$, $\gamma = 1$, হলে পাওয়া যায়,

$${}_1F_1(-2, 1; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)_k\, x^k}{(1)_k\, k!}$$

$$= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} \qquad (২.৯৮)$$

এ রকম বিশেষ বিবেচনায় আরো মৌলিক ফাংশন নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নমালা

প্রমাণ কর :

১। ${}_2F_1(\alpha, \beta; \beta; z) = (1 - z)^{-\alpha}$

২। $${}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{2}\left\{(1-z)^{-\alpha}+(1+z)^{-\alpha}\right\}$$

৩। $${}_2F_1\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}+1; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2\alpha z}\left\{(1-z)^{-\alpha}-(1+z)^{-\alpha}\right\}$$

৪। $${}_2F_1(1, 1; 2; z) = -\frac{1}{z}\log(1-z)$$

৫। $${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2z}\log\frac{1+z}{1-z}$$

৬। $${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{\sin^{-1}z}{z}$$

৭। $${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{\tan^{-1}z}{z}$$

৮। $${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{2}{\pi}K(k)$$

৯। $${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{2}{\pi}E(k)$$

১০। $$(\alpha-\beta)(1-x)\,{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = (\gamma-\beta)\,{}_2F_1(\alpha, \beta-1; \gamma; x) - (\gamma-\alpha)\,{}_2F_1(\alpha-1, \beta; \gamma; x)$$

১১। $$\begin{aligned}(\gamma-\beta-1)\,{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) &= (\gamma-\alpha-\beta-1)\,{}_2F_1(\alpha, \beta+1; \gamma; x) \\ &\quad + \alpha(1-x)\,{}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma; x) \\ &= (\alpha-\beta-1)(1-x)\,{}_2F_1(\alpha, \beta+1; \gamma; x) \\ &\quad + (\gamma-\alpha)\,{}_2F_1(\alpha-1, \beta+1; \gamma; x)\end{aligned}$$

১২। $$(\gamma-\alpha-\beta)\,{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = (\gamma-\alpha)\,{}_2F_1(\alpha-1, \beta; \gamma; x) - \beta(1-x)\,{}_2F_1(\alpha, \beta+1; \gamma; x)$$

১৩। $(\alpha-\gamma+1)\ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x)$

$$= \alpha\ {}_2F_1(\alpha+1, \beta ; \gamma ; x) - (\gamma-1)\ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma-1 ; x)$$

১৪। $(1-x)\ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma ; x) - {}_2F_1(\alpha-1, \beta-1 ; \gamma ; x)$

$$= \frac{(\alpha+\beta-\gamma-1}{\gamma}\ x\ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma+1 ; x)$$

১৫। $\frac{(1-\beta)x}{\gamma}\ {}_2F_1(\alpha, \beta ; \gamma+1 ; x)$

$$= {}_2F_1(\alpha-1, \beta-1 ; \gamma ; x) - {}_2F_1(\alpha, \beta-1 ; \gamma ; x)$$

প্রমাণ কর :

১৬। $${}_1F_1(\alpha+1, \alpha ; x) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) e^x$$

১৭। $${}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} ; -x^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} \operatorname{erf}(x)$$

১৮। $${}_1F_1(\alpha+1, \gamma ; x) - {}_1F_1(\alpha, \gamma ; x) = \frac{x}{\gamma}\ {}_1F_1(\alpha+1, \gamma+1 ; x)$$

১৯। $${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} ; -x^2\right) = e^{-x^2} - \sqrt{\pi}\, x \operatorname{erf}(x)$$

২০। $$x^n\ {}_1F_1(n, n+1 ; -x) = n\int_0^x t^{n-1} e^{-t}\, dt$$

২১। প্রমাণ কর যে

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial t}$$

এর সমাধান হলো

$$V = C t^m\ {}_1F_1\left(-m, \frac{1}{2} ; -\frac{x^2}{4kt}\right)$$

যেখানে C এবং m যে কোনো ধ্রুবক।

তৃতীয় অধ্যায়

ফুরিয়ার সিরিজ
(Fourier Series)

৩.১ ভূমিকা

এখানে আমরা

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx) \qquad (৩.১)$$

আকারের সিরিজ নিয়ে আলোচনা করব। বিশেষ করে $f(x)$ কোন ধরনের ফাংশন হলে উপরিউক্ত সিরিজের যোগফল হিসেবে তাকে প্রকাশ করা যাবে। গাণিতিক পদার্থবিদ্যার বহু শাখায় এধরনের সমস্যা দেখা যায়। আমরা দেখতে পাই যে, উপরিউক্ত সিরিজ যদি $x=a$ বিন্দুতে অভিসারী (convergent) হয় বা না হয় তাহলে তা $x=a+2\pi$ বিন্দুতেও যথাক্রমে অভিসারী হবে বা হবে না। কারণ $\cos kx$ এবং $\sin kx$ এর পিরিয়ড হলো 2π। পিরিয়ড 2π হওয়ার অর্থ হলো কোনো আংশিক যোগফল $x=a$ বিন্দুতে যা হবে তা $x=a+2\pi$ বিন্দুতেও তাই হবে। সাধারণভাবে উক্ত যোগফল $x=a$ বিন্দুতে যা হয় তা $x=a+2k\pi$ বিন্দুতে একই হয় যখন k একটি পূর্ণ সংখ্যা। কাজেই উপরিউক্ত সিরিজ (৩.১) যদি কোনো ফাংশন $f(x)$ নির্দেশ করে তবে তা অবশ্যই পিরিয়ডিক ফাংশন হবে। অর্থাৎ $f(x)$ পিরিয়ডিক ফাংশন হবে যদি

$$f(x)=f(x+2\pi)$$

শর্ত পূরণ করে। এখানে 2π হলো ফাংশন $f(x)$ এর পিরিয়ড।

৩.২ ফুরিয়ার সিরিজ নিয়ে আলোচনার জন্য নিম্নোক্ত বিষয়গুলি সহায়ক হিসেবে কাজে আসবে

সংজ্ঞা

(ক) জোড় ফাংশন (Even function) : কোনো ফাংশন $f(x)$ কে জোড় ফাংশন বলা হয় যদি

$$f(-x)=f(x)$$

শর্ত পূরণ করে। এই অবস্থাতে আমরা পাই

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(খ) বিজোড় ফাংশন (Odd function) : কোনো ফাংশন $f(x)$ একটি বিজোড় ফাংশন হবে যদি তা

$$f(-x) = -f(x)$$

শর্ত পূরণ করে। এক্ষেত্রে আমরা পাই

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

৩.৩ ফুরিয়ার সিরিজ

কতকগুলি শর্ত সাপেক্ষে ফাংশন $f(x)$ এর জন্য ব্যবধান $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ এর মধ্যে ত্রিকোণোমিতিক সিরিজ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (৩.২)$$

কে ফুরিয়ার সিরিজ বলা হয়। এখানে a_0, a_k, b_k গুলিকে ফুরিয়ারের ধ্রুবক বা ফুরিয়ার সহগ বলে।

ফরাসি গণিতবিদ জে. বি. জে. ফুরিয়ার (Joseph B. J. Fourier : 1768–1830) প্রথমে উক্ত ত্রিকোণোমিতিক সিরিজ (৩.২) পদার্থবিদ্যার তাপ সঞ্চালন ক্ষেত্রে ব্যবহার করেন। তাঁর নাম অনুসারে উপরিউক্ত সিরিজের নাম হয় ফুরিয়ার সিরিজ। বর্তমানে ফুরিয়ার সিরিজ পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন শাখার সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে প্রয়োগ হয়ে থাকে।

৩.৪ ফুরিয়ার সহগ (Fourier coefficients) নির্ণয়

আমরা ধরে নিতে পারি যে ফুরিয়ার সিরিজ ব্যবধান $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ এর মধ্যে $f(x)$ ফাংশনের সাথে সমভাবে (uniformly) অভিসারী হয়, যার ফলে সিরিজের প্রতিটি পদকে আলাদাভাবে সমাকলন করা যায়। এর ফলে আমরা পাই

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (৩.৩)$$

এখন আমরা $(-\pi, \pi)$ পিরিয়ডের উপর (৩.৩) কে সমাকলন করে পাই

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \; dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \; dx \right)$$

$$= a_0 \pi + 0 + 0$$

কাজেই ফুরিয়ার সহগ a_0 হবে

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad (৩.৪)$$

আবার (৩.৩) কে $\cos nx$ দিয়ে গুণ করে এবং $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ পিরিয়ডের উপর সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \; \cos nx \; dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \; \cos nx \; dx$$

যখন $n = k$ তখন কেবল উপরিউক্ত সিরিজের একটি অশূন্যপদ পাওয়া যায় যা হলো

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx = a_k \pi$$

অতএব ফুরিয়ার সহগ a_k হলো,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx \qquad (৩.৫)$$

অনুরূপভাবে (৩.৩) কে sin nx দিয়ে গুণ করে এবং পিরিয়ড $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ এর উপর সমাকলন করে আমরা পাই ফুরিয়ার সহগ b_k যা হলো

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \tag{৩.৬}$$

ত্রিকোণোমিতিক সিরিজ (৩.৩) যার সহগগুলি (৩.৪), (৩.৫) এবং (৩.৬) দ্বারা নির্ণয় করা যায়, তাকে ফাংশন $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ বলে।

দ্রষ্টব্য ঃ উপরিউক্ত জোড় এবং বিজোড় ফাংশনের ধর্ম থেকে আমরা দেখতে পাই যে, যদি $f(x)$ একটি

(ক) জোড় ফাংশন হয় তবে ফুরিয়ার সহগগুলি নিম্নরূপ হবে ঃ

$$a^0 \neq 0, \; a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \neq 0$$

$$b_k = 0$$

(খ) $f(x)$ যদি বিজোড় ফাংশন হয় তবে

$$a_0 = 0, \; a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \neq 0$$

এই ধর্মগুলি স্মরণ রাখলে ফুরিয়ার সহগ সহজে নির্ণয় করা যায়।

সংজ্ঞা

(i) উল্লম্বিক ফাংশন : যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুটি $a \leqslant x \leqslant b$ ব্যবধানের উপর উল্লম্বিক হয়, তবে

$$\int_a^b f(x) \, g(x) \, dx = 0$$

(ii) আর যদি তারা আদর্শমানী হয়, তবে

$$\int_0^b f^2(x) \, dz = 1$$

ত্রিকোণোমিতির সূত্রগুলির প্রয়োগে আমরা দেখতে পাই যে, ফুরিয়ার সিরিজের পদগুলি উল্লাম্বিক। প্রতিটি পদ পরস্পরের সাথে পিরিয়ড $(-\pi, \pi)$ এর উপর উল্লাম্বিক। ফুরিয়ার সহগ a_k বা b_k এর যথার্থ (suitable) মানের জন্য যে কোনো পদ আদর্শমানী (normed) হয়। প্রকৃতপক্ষে উল্লাম্বিক এবং আদর্শমানী সম্পর্কগুলি নিম্নরূপ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \; m \neq n, \; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \; m \neq n, \; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \cdots$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = 1, \; n = 1, 2 \cdots$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = 1, \; n = 1, 2 \cdots \cdots$$

উপপাদ্য ১

যদি সিরিজ (৩.১) সমভাবে $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ এর উপর $f(x)$ এর সাথে অভিসারী হয়, তবে তা $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ।

প্রমাণ : যদি সিরিজ (৩.১)-কে $\cos nx$ দিয়ে গুণ করে নেয়া যায় তবে তা $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ এর উপর সমভাবে $f(x)$ এর সাথে অভিসারী হয়। ফলে পদে পদে সমাকলন করা সম্ভব।

অতএব,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx$$

কাজেই উপরিউক্ত উল্লাম্বিক এবং আদর্শমানী সম্পর্ক হতে পাওয়া যায়,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = A_n, \; n = 0, 1, 2, \cdots \cdots$$

অনুরূপভাবে ফুরিয়ার সহগ B_k নির্ণয় করা যায়।

উপরিউক্ত উপপাদ্য কোন ফাংশনের ফুরিয়ার সিরিজ এবং তার সমাকলনের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

৩.৫ পিরিয়ড 2L এর উপর ফুরিয়ার সিরিজ

আমরা পিরিয়ড $-\pi \leq x \leq \pi$ ছাড়াও অন্য পিরিয়ড $-L \leq x \leq L$ এর উপর ফুরিয়ার সিরিজ পেতে পারি। মনে করি $\phi(y)$ হলো পিরিয়ড $(-L, L)$ এর উপর সমাকলনযোগ্য ফাংশন। মনে করি $y = \frac{Lx}{\pi}$, তাহলে $\phi\left(\frac{Lx}{\pi}\right)$ হলো 2π পিরিয়ডের উপর x এর পিরিয়ডিক ফাংশন। ধরা যাক

$$f(x) = \phi\left(\frac{Lx}{\pi}\right) = \phi(y)$$

তাহলে $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ফাংশন $\phi(y)$-এর ফুরিয়ার সিরিজে পরিণত হয় যখন

$$\phi(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi y}{L} + b_k \sin \frac{k\pi y}{L}\right)$$

কাজেই আমরা ফুরিয়ার সহগগুলি নিম্নোক্তভাবে পেয়ে থাকি :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \phi(y) \cos \frac{k\pi y}{L} \, dy$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \phi(y)\sin\frac{k\pi y}{L}\, dy$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \phi(y)\, dy$$

দ্রষ্টব্য ঃ (i) জোড় ফাংশনের জন্য যখন $b_k = 0$, তখন ফাংশনের ফুরিয়ার সিরিজ হলো কোসাইন (cosine) সিরিজ।

(ii) বিজোড় ফাংশনের জন্য যখন $a_0 = 0$, $a_k = 0$, তখন ফাংশনের ফুরিয়ার সিরিজ হলো সাইন (sine) সিরিজ।

উপরিউক্ত রূপান্তর $y = \frac{Lx}{\pi}$-কে ফুরিয়ার সিরিজের পিরিয়ড পরিবর্তনের স্কেল বলা হয়। এই স্কেলের মাধ্যমে কোনো ফাংশনের ফুরিয়ার সিরিজের পিরিয়ড $(-\pi, \pi)$ থেকে অন্য পিরিয়ড $(-L, L)$-তে যাওয়া যায় এবং তা বিপরীতক্রমে।

৩.৬ ডিরিখলের উপপাদ্য (Dirichlet's theorem : Peter Gustav Lejeune Dirichlet : 1805—1859)

প্রত্যেক ফাংশন $f(x)$ যার কেবল একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক বিচ্ছিন্নতা এবং নির্দিষ্ট সংখ্যক উর্ধ্ববিন্দু এবং অধবিন্দু আছে তাকে ফুরিয়ার সিরিজে বিস্তার করা যায়।

এ ধরনের ফাংশনকে মসৃণ, খণ্ডও অবিচ্ছিন্ন (piece wise continuous) নিয়মিত বলে। এখানে

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

প্রমাণ ঃ ১ম পদ —আমরা প্রথমে $f(x)$-কে একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বিবেচনা করি, যার বিচ্ছিন্নতাগুলি $f'(x)$ এর মধ্যে আছে। মনে করি α_n এবং β_n হলো $f'(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজের অন্তর্ভুক্ত সহগ।

অর্থাৎ

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\, dx = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \qquad (৩.৭)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (৩.৮)$$

এবং $\alpha_0 = 0$, যেহেতু $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

এখন,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2+b_n^2\right) \qquad (৩.৯)$$

(দ্রষ্টব্য ৩.৮) যেখানে a_n এবং b_n হলো $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজের অন্তর্ভুক্ত ফুরিয়ার সহগ :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -\frac{\beta_n}{n} \qquad (৩.১০)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{\alpha_n}{n} \qquad (৩.১১)$$

কাজেই,

$$\left|\sum_{n=n_0}^{m}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)\right| = \sum_{n=n_0}^{m}\frac{1}{n}\left(n\,a_n\cos nx + n\,b_n\sin nx\right)$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=0}^{m} n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)}\ \sqrt{\sum_{n=n_0}^{m}\frac{1}{n^2}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}\ \sqrt{\sum_{n=n_0}^{m}\frac{1}{n^2}} \to 0,\ \text{as } m\to\infty$$

অতএব অসীম সিরিজ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) = f(x)$$

সমতাবে ফাংশন $f(x)$ এর সাথে অভিসারী বা এর ফুরিয়ার সিরিজে বিস্তার বাস্তব সম্পন্ন।

২য় পর্ব : খণ্ড অবিচ্ছিন্নতাসহ মসৃণ ফাংশনের ফুরিয়ার সিরিজে বিস্তার যাচাই করার জন্য আমরা বিশেষ ধরনের ফাংশন বিবেচনা করি যা হলো

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ f(0) = 0,\ f(x + 2\pi) = f(x)$$

এর অর্থ হলো ফাংশনটি π দূরত্ব লাফ দেয়, যখন লাফের বিন্দুগুলি হলো

$$x = \pm 2m\pi\ ,\ m = \pm 0\ ,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \cdots$$

এই ফাংশনের ফুরিয়ার সহগগুলি হলো

$$a_0 = a_n = 0$$

এবং
$$b_n = \frac{1}{n}$$

কাজেই যদি এ ধরনের ফাংশনের ফুরিয়ার সিরিজ বাস্তবে থাকে তবে তা হবে

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

৩.৭ ডিরিখলের শর্ত (Dirichlet's conditions)

ধরে করি কোনো ফাংশন $f(x)$

(i) $(-L, L)$ ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত শান্ত সংখ্যক বিন্দু ব্যতীত এককমানবিশিষ্ট ;

(ii) $(-L\ ,\ L)$ ব্যবধি বহির্ভূত এলাকায় $2L$ পিরিয়ডবিশিষ্ট ;

(iii) $(-L\ ,\ L)$ ব্যবধিতে $f(x)$ এবং $f'(x)$ খণ্ড অবিচ্ছিন্ন।

তাহলে ধারা

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

যেখানে
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ ,\ n = 0\ ,\ 1,\ 2,\ \cdots\ \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ক) $f(x)$-তে অভিসারী হবে যদি x বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয়।

(খ) $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ তে অভিসারী হবে যদি x বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন হয়।

৩.৮ পার্সিভাল উপপাদ্য (Parseval's theorem)

কোনো সসীম সীমার মধ্যে যে কোনো সীমাবদ্ধ পরিবর্তনশীল ফাংশন দ্বারা একটি ফুরিয়ার সিরিজকে গুণ করা যায় এবং পদে পদে সমাকলন করা যায়।

প্রমাণ ঃ মনে করি

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx)$$

একটি সীমাবদ্ধ পরিবর্তনশীল ফাংশন। যে কোনো সমাকলনযোগ্য ফাংশন $f(x)$ দ্বারা তাকে গুণ করি এবং $(0, 2\pi)$ এর উপর পদে পদে সমাকলন করি। অতএব

$$g(x)\,f(x) = \frac{a_0\,\alpha_0}{4}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx)(a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \cdots$$

$$= \frac{a_0\alpha_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n a_n\cos^2 nx + \beta_n b_n\sin^2 nx)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n b_n + \beta_n a_n)\sin nx\cos nx + \cdots$$

এখন $(0, 2\pi)$ এর উপর পদে পদে সমাকলন করলে হয়

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\alpha_0 a_0}{4}\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n a_n}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx+\frac{\beta_n b_n}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx+\cdots\right.$$

$$=\frac{\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n a_n+\beta_n b_n)+0$$

যেহেতু অবশিষ্ট পদের সমাকলন শূন্য হবে।

এখন $g(x)=f(x)$ লিখে আমরা পাই

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

যা পার্সিভাল উপপাদ্য নামে পরিচিত।

উদাহরণ ১

$f(x)=x,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

একে ফুরিয়ার সিরিজে প্রকাশ কর।

উত্তর : $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করে পাওয়া যায়,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx, \text{ (বিজোড় ফাংশন)}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{-x \cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(-\pi \cos n\pi \right)$$

$$= -\frac{2 \cos n\pi}{n}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{n}, & n \text{ জোড় সংখ্যা} \\ \dfrac{2}{n}, & n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

কাজেই $f(x) = x$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হবে

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

অথবা $\quad f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + b_4 \sin 4x + \cdots$

অথবা $\quad x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots \right)$

যা একটি সাইন (sine) সিরিজ।

উদাহরণ ২

$f(x)$-কে ফুরিয়ার সিরিজে প্রকাশ কর যেখানে

$$f(x) = 0, \quad -\pi < x < 0$$
$$= \pi, \quad 0 < x < \pi$$

উত্তর : $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করে পাওয়া যায়,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,.\,dx + \int_{0}^{\pi} \pi\,dx\right) = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,.\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} \pi\,.\cos nx\,dx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,.\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} \pi\,.\sin nx\,dx\right)$$

$$= -\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\,(1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ জোড় সংখ্যা} \\ \dfrac{2}{n}, & n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

কাজেই f(x) এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right)$$

উদাহরণ ৩

ফাংশন f(x)-কে ফুরিয়ার সিরিজে প্রকাশ কর :

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

অতঃপর প্রমাণ কর যে

$$\pi^2/6 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

উত্তর : f(x) এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করে আমরা পাই

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \right)$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left(\left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \right)$$

$$\frac{4}{n^2\pi}(\pi \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, & \text{যখন } n \text{ জোড় সংখ্যা} \\ -\dfrac{4}{n^2}, & \text{যখন } n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = 0$$

কাজেই $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\cdots\right)$$

উক্ত ফুরিয়ার সিরিজে $x = \pi$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

উদাহরণ ৪

$f(x)$ কে ফুরিয়ার সিরিজে প্রকাশ কর :

$$f(x) = 0, \quad -\pi \leq x \leq 0$$
$$= x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

অতএব প্রমাণ কর যে

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

উত্তর ঃ $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করলে দাঁড়ায়

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0.dx + \int_{0}^{\pi} x\ dx \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\ dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0.\cos kx\ dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\ dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x \sin nx}{n}\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} \sin nx\ dx \right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2}, & \text{যখন } n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \\ 0, & \text{যখন } n \text{ জোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \sin nx\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} \quad \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi} \cos nx\ dx \right)$$

$$= -\frac{1}{n}\cos n\pi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{যখন } n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{যখন } n \text{ জোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

কাজেই উপরিউক্ত ফাংশনের ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\cdots\right)$$

$$+ \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\cdots\cdots$$

এখন $x = 0$ বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

উদাহরণ ৫

ফাংশন $f(x)$ কে ফুরিয়ার সিরিজে প্রকাশ কর :

$$f(x) = x + x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

অতঃপর প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

উত্তর : $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

এখন আমরা ফুরিয়ার সহগগুলো নির্ণয় করে পাই

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+x^2)dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+x^2)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, & \text{যখন } n \text{ জোড়} \\ -\dfrac{4}{n^2}, & \text{যখন } n \text{ বিজোড়} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+x^2)\sin nx\, dx$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2}{n}, & n \text{ জোড় সংখ্যা} \\ \dfrac{2}{n}, & n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

কাজেই $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$x+x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \dots\right)$$

$$+ 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \dots\right)$$

এখন উক্ত সিরিজে $x = \pm\pi$ বসিয়ে আমরা পাই

$$f(x) = x + x^2 = \tfrac{1}{2}(\pi + \pi^2 - \pi + \pi^2) = \pi^2$$

অতএব $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots \cdots\right)$

অথবা $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \cdots$

উদাহরণ ৬

$f(x)$ কে ফুরিয়ার সিরিজে প্রকাশ করি যখন

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \ , \quad -2 < x < 0 \\ &= 1 \ , \quad 0 < x < 2 \end{aligned}$$

উত্তর ঃ এখানে $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

এ ক্ষেত্রে ফুরিয়ার সহগগুলি হবে নিম্নরূপ :

$$a_0 = \tfrac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0.dx + \int_{0}^{2} 1.dx\right)$$

$$= 1$$

$$a_n = \tfrac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0.\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} 1.\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0.\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2} 1.\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ জোড় সংখ্যা} \\ \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

অতএব $f(x)$ এর নির্ণেয় ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots\cdots\right)$$

উদাহরণ ৭

পিরিয়ড 4 এর উপর $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ নির্ণয় কর যখন

$$f(x) = x,\ 0 < x < 4$$

অত:পর প্রমাণ কর যে

$$\text{(i)}\quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\pi^4}{96} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$$

উত্তর : এখানে পিরিয়ড $= 2L = 4$

অথবা $\quad L = 2$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করলে আমরা পাই

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{8}{n^2\pi^2}, & n \text{ বিজোড়} \\ 0, & n \text{ জোড়} \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 0$$

অতএব $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2} + b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

অথবা $\quad x = 1 - \dfrac{8}{n^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$, যখন n বিজোড়

এখন $x = 2$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad (\text{যখন } n \text{ বিজোড়})$$

অথবা $\quad \dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{1}{1^2} = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots \cdots$

অপরপক্ষে আমরা পার্সিভাল উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই

$$\int_0^2 \{f(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

অথবা $$\int_0^2 x^2 dx = 2 + \frac{64}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad (n \text{ বিজোড়})$$

অথবা $$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

অথবা $$\frac{\pi^4}{46} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots$$

উদাহরণ ৮

$f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ নির্ণয় কর যখন

$$f(x) = -\frac{\pi}{4}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$$

$$= \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leqslant x \ll \pi$$

উত্তর : $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করে পাওয়া যায়,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cos kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi}{4} \cos kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \cos kx \, dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{0} \cos kx \, dx + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx = 0$$

অথবা $a_0 = 0, \; a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin kx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{-\pi}{4}\sin kx\, dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{4}\sin kx\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \sin kx\, dx = \frac{1}{2k}(1 - \cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{যখন } k \text{ বিজোড়} \\ 0, & \text{যখন } k \text{ জোড়} \end{cases}$$

কাজেই $f(x)$ এর নির্ণেয় ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin kx$$

অথবা $$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\cdots$$

উদাহরণ ৯

$f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ নির্ণয় কর যখন

$$f(x) = x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

উত্তর ঃ $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করে পাওয়া যায়,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\, dx = 0$$

যেহেতু $f(x)$ হলো বিজোড় ফাংশন ।

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx\, dx$$

$$= (1)^{k-1}\frac{2}{k}$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$x = 2\sin x - \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{2\sin 3x}{3} - \frac{2\sin 4x}{4} + \cdots\cdots$$

উদাহরণ ১০

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$$

সিরিজটি হলো একটি ত্রিকোণমিতিক সিরিজ। এটি ফুরিয়ার সিরিজ নয়। কারণ, এখানে এমন কোনো ফাংশন $f(x)$ নেই যার জন্য ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করা যায়। কেননা ত্রিকোণমিতিক সিরিজ ফুরিয়ার সিরিজ হবে তখনই যখন এমন কোনো ফাংশন $f(x)$ পাওয়া যাবে যার ফলে ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ১১

ফুরিয়ার সিরিজ নির্ণয় কর যখন $f(x) = |x|, \; -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

উত্তর ঃ ফাংশন $f(x)$ এর ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

এখন ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করে পাওয়া যায়,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx\, dx = \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

$b_k = 0$, যেহেতু $f(x)$ জোড় ফাংশন। অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\cdots\right)$$

প্রশ্নমালা

১। ফাংশন f(x) এর ফুরিয়ার সিরিজ নির্ণয় কর :

$$f(x)=2x\ ,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$$
$$=x,\quad -\pi\leqslant x\leqslant$$

উত্তর : $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\cdots\right)$

$$+3\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\cdots\right)$$

২। $f(x)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{x^2}{4}\ ,\quad -\pi\leqslant x\leqslant \pi$

উত্তর : $\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\cdots\cdots$

৩। $f(x)=-\frac{\pi+x}{2}\ ;\quad -\pi\leqslant x\leqslant 0$

$$=\frac{\pi-x}{2}\ ,\ 0\leqslant x\leqslant \pi$$

উত্তর : $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots\cdots$

৪। $f(x)=1,\quad -\pi\leqslant x\leqslant 0$

$$=-2,\ \ 0\leqslant x\leqslant \pi$$

উত্তর : $-\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

৫। (i) $f(x)=\cos 2x,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$

(ii) $f(x)=\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$

উত্তর : (i) $-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\cdots\cdots\right)$

(ii) $\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1-2^2}+\frac{\cos 4x}{1-4^2}+\cdots\cdots\right)$

৬। $f(x)=2,\ 0<x<1$

উত্তর : $1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$

৭। $f(x)=-x,\ -\pi<x<0$

$0,\ 0<x<\pi$

উত্তর : $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}$

৮। $f(x)=e^{ax},\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

উত্তর : $\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right)$

৯। $f(x)=0,\ -\pi<x<0$

$=\frac{\pi x}{4},\ 0<x<\pi$

এবং দেখাও যে, $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$

উত্তর : $\frac{\pi^2}{16}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}(\cos n\pi-1)\cos nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4n}\cos n\pi\sin nx$

১০। $f(x)=a,\ 0<x<\pi$ এবং a ধ্রুবক।

উত্তর : $a=\frac{4a}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\cdots\right)$

দ্বিতীয় অংশ

৩.৯ সুতার কম্পনের অন্তরক সমীকরণ

$$y_{tt}(x, t) = a^2 y_{xx}(x, t) \tag{৩.১}$$

সমীকরণটি হলো সুতার কম্পনের আংশিক অন্তরক সমীকরণ। এটি যোগাশ্রয়ী (linear), দ্বিতীয় ক্রম এবং ধ্রুবক সহগবিশিষ্ট। নিম্নের প্রান্তিক শর্ত সাপেক্ষে তার সমাধান নির্ণয় করা হবে। উল্লেখ্য যে, এটি একটি তরঙ্গ সমীকরণ। প্রান্তিক শর্তগুলি হলো :

$$y(x, 0) = f(x),\ y_t(x, 0) = 0,\ t > 0,\ -\infty < x < \infty$$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটি হলো

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{৩.২}$$

মনে করি $\quad u = x + at,\ v = x - at$

এক্ষেত্রে সমীকরণ (৩.২) পরিবর্তিত হয়ে দাঁড়ায়

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0 \tag{৩.৩}$$

এখন v এর সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা পাই

$$\frac{\partial y}{\partial u} = g'(u)$$

অথবা $\quad y = g(u) + h(v)$

যেখানে $g(u)$ এবং $h(v)$ হলো যে কোনো অন্তরকরণযোগ্য ফাংশন। তাহলে আমরা পাই

$$y(x, t) = g(x + at) + h(x - at) \tag{৩.৪}$$

এখন প্রদত্ত শর্তগুলি ব্যবহার করে পাওয়া যায়,

$$y(x, 0) = g(x) + h(x)$$

অথবা $\quad f(x) = g(x) + h(x) \qquad (৩.৫)$

এবং $\quad y_t(x, t) = ag'(x + at) - ah'(x - at)$

অথবা $\quad y_t(x, 0) = ag'(x) - ah'(x)$

অথবা $\quad 0 = ag'(x) - ah'(x)$

অথবা $\quad c = g(x) - h(x) \qquad (৩.৬)$

যেখানে c একটি ধ্রুবক। কাজেই (৩.৫) এবং (৩.৬) থেকে আমরা পাই

$$g=\frac{1}{2}(f+c),\ \ h=\frac{1}{2}(f-c)$$

অতএব সমীকরণ (৩.২) এর সমাধান হলো

$$y(x,t)=\tfrac{1}{2}f(x+at)+\tfrac{1}{2}f(x-at) \qquad (৩.৭)$$

৩.১০ উক্ত **সমস্যার সাথে আরো দুটি প্রান্তিক শর্ত যুক্তকরণ**

প্রান্তিক শর্ত যুক্ত করলে সমস্যাটি দাঁড়ায়

$$y_{tt}(x,t)=a^2y_{xx}(x,t)\ ,\ t>0,\ \ 0<x<c$$

$$y(x,0)=f(x),\ y_t(x,0)=0$$

$$y(0,t)=0,\ y(c,t)=0$$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণটি দাঁড়ায়

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (৩.১)$$

মনে করি (চলক পৃথককরণ প্রক্রিয়া)

$$y(x,t)=X(x)\,T(t) \qquad (৩.২)$$

এর ফলে সমীকরণ (৩.১) হতে আমরা পাই

$$X(x)\,T''(t)=a^2X''(x)\,T(t)$$

অথবা

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} \qquad (৩.৩)$$

এখন (৩.৩) থেকে আমরা দেখতে পাই যে, এর বামপক্ষ কেবল **x** এর ফাংশন এবং ডানপক্ষ কেবল **t** এর ফাংশন। কাজেই যদি (৩.৩) বলবৎ থাকে তবে উভয়পক্ষই একটি ধ্রুবকের সমান হবে। মনে করি ধ্রুবকটি $-\lambda$, তাহলে

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (৩.৪)$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \qquad (৩.৫)$$

যদি $y(0,t)=0$ হয়, তবে $t>0$ এর সকল মানের জন্য

$$X(0)\,T(t)=0$$

কিন্তু $T(t)=0$ হলে সমীকরণের সমাধান হবে শূন্য বা নিম্নমানের সমাধান। অতএব আমরা ধরে নিতে পারি যে $T(t)\neq 0$ এবং $X(0)=0$

অনুরূপভাবে $y(c,0)=0$, এবং $y_t(x,0)=0$ থেকে আমরা পাই

$$X(c)=0,\ T'(0)=0$$

এভাবে সমস্যাটি দাঁড়ায়

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; X(0) = 0, \; X(c) = 0 \quad (৩.৬)$$

এবং
$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \; T'(0) \quad (৩.৭)$$

সমস্যা (৩.৬) এর সমাধান : যদি $\lambda = 0$ হয় তবে (৩.৬) থেকে পাওয়া যায়

$$X(x) = Ax + B$$

সংশ্লিষ্ট শর্ত থেকে আমরা পাই

$$A = 0, \; B = 0$$

কাজেই $X(x) = 0$ যা নিম্নমানের সমাধান। উন্নতমানের সমাধানের জন্য আমরা ধরে নিই $\lambda \neq 0$ এবং $\lambda > 0$, কাজেই

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

এর সমাধান হবে

$$X(x) = C_1 \sin x\sqrt{\lambda} + C_2 \cos x\sqrt{\lambda} \quad (৩.৮)$$

যদি $X(0) = 0$ হয় তবে $C_2 = 0$ এবং $X(c) = 0$। যেহেতু $C_1 = 0$ নিম্নমানের সমাধান দেয়, ফলে

$$\sin C\sqrt{\lambda} = 0 \;\; (C_1 \neq 0)$$

অথবা $c\sqrt{\lambda} = n\pi$

অথবা $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{c}$, $n = 1, 2, 3, \cdots \cdots$

অতএব নির্ণেয় সমাধান হলো

$$X(x) = C_1 \sin\frac{n\pi x}{c} \quad (৩.৯)$$

এখানে λ-কে আইগেন মান বলে এবং সংশ্লিষ্ট ফাংশন $X(x)$ কে আইগেন ফাংশন বলে।

সমস্যা (৩.৭) এর সমাধান : অনুরূপভাবে সমীকরণ (৩.৭) এর সমাধান হলো

$$T(t) = C_3 \cos\frac{n\pi at}{c} \quad (৩.১০)$$

কাজেই সমীকরণ (৩.১) এর সাধারণ সমাধান হবে

$$y_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{c} \cos\frac{k\pi at}{c} \quad (৩.১১)$$

প্রান্তিক শর্ত $y(x, 0) = f(x)$ হতে পাওয়া যায়,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{c} \qquad (৩.১২)$$

যা ফুরিয়ার সিরিজ,

এবং
$$b_k = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \sin \frac{k\pi x}{c}\, dx \qquad (৩.১৩)$$

$$k = 1, 2, 3, \cdots$$

এখানে উল্লেখ্য যে, অনুচ্ছেদ ৩.৯ এর (৩.৬) নং সমাধান এবং অনুচ্ছেদ ৩.১০ এর (৩.১১) নং সমাধান একই। ফাংশন $f(x \pm at)$ এর চিত্র অংকনের জন্য $y = f(x)$ কে যথাযথভাবে ব্যবহার করতে হবে। কাজেই শব্দের গতি দুটি ফাংশনের যোগফলের দ্বারা নিয়ন্ত্রিত যে দুটি ফাংশনের প্রতিটি $y = f(x)$ এর প্রয়োগ। এখানে শব্দের গতি a, একটি ডানদিকে এবং অপরটি বামদিকে সম্প্রসারিত হয়।

৩.১১ বিশেষ অবস্থা

যদি $$f(x) = h \sin \frac{\pi x}{c}, \quad 0 \leq x \leq c$$

হয় তবে আমরা পাই

$$y(x, t) = h \sin \frac{\pi x}{c} \cos \frac{\pi a t}{c}$$

এখানে উল্লেখ্য যে, $f(x)$ এর চিত্রটি সব সময় সাইন (sine) রেখার একটি অংশের আকার বজায় রাখে। এই গতিটি পিরিয়ডিক যার পিরিয়ড হলো $2c/a$। কম্পনশীল সুতা বা তার দ্বারা যে সুরধ্বনি উৎপন্ন হয় তাকে বলে সুতার মৌল (fundamental)।

যদি $\frac{2c}{a} = 2c\left(\frac{\rho}{T}\right)^{1/2}$ হয়, তবে এর কম্পাঙ্ক ν হবে $\left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2} \frac{1}{2c}$,

যেখানে ρ হলো সুতার ব্যাস, T হলো সুতার টান এবং c হলো দৈর্ঘ্য। এটি হতে আমরা দেখতে পাই যে,

$$\nu \propto \sqrt{T}$$

$$\nu \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

$$\nu \propto \frac{1}{c}$$

এ বিষয়গুলি একটি পিয়ানো বা গীটার তৈরি করার সময় ব্যবহার করা হয়ে থাকে। ধ্রুবক h অবশ্যই ছোট হবে যা শব্দ-নোটের শক্তি নির্ণয় করে।

যদি $$f(x) = h \sin\frac{k\pi x}{c}$$ হয় তবে

$$y(x, t) = h \sin\frac{k\pi x}{c} \cos\frac{k\pi a t}{c}$$

কাজেই এক্ষেত্রে শব্দ তরঙ্গের কম্পাঙ্ক হবে উপরিউক্ত শব্দ তরঙ্গের কম্পাঙ্কের k গুণ। এখানকার স্বরধ্বনিকে তাদের $(k-1)$-তম উচ্চটান বলা হয়।

৩.১২ তাপ পরিচালন সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \tag{৩.১}$$

যখন
$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$
$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0$$
$$u(x, 0) = f(x)$$

সমাধান : মনে করি

$$u(x, t) = e^{mx + nt} \tag{৩.২}$$

অতএব একে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m^2 e^{mx + nt}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = n e^{mx + nt}$$

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ (৩.১) থেকে পাওয়া যায়,

$$n = m^2$$

এবং
$$u(x, t) = e^{mx + m^2 t}$$

যেহেতু n কে আমরা m^2 আকারে পেয়েছি, কাজেই m এর পরিবর্তে $-m$ লিখলে কোনো ক্ষতি হবে না। ফলে আমরা আরো পাই

$$u(x, t) = e^{-mx + m^2 t}$$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান হলো

$$u(x, t) = A e^{mx + m^2 t} + B e^{-mx + m^2 t} \tag{৩.৩}$$

এখন (৩.৩) হতে পাওয়া যায়,

$$u_x(x, t) = Am\, e^{mx + m^2t} - Bm\, e^{-mx + m^2t} \qquad (৩.৪)$$

অথবা $$u_x(0, t) = Am\, e^{m^2t} - Bm\, e^{m^2t}$$

অথবা $$0 = A - B \qquad (৩.৫)$$

আবার $$u_x(1, t) = Am\, e^{m + m^2t} - Bm\, e^{-m + m^2t}$$

অথবা $$0 = A\, e^{m} - B\, e^{-m} \qquad (৩.৬)$$

এখন (৩.৫) এবং (৩.৬) সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায়,

$$B(e^{-m} - e^{m}) = 0$$

যদি $B = 0$ হয় তবে (৩.৫) হতে $A = 0$ হবে। তখন $u = 0$ ছাড়া সমীকরণ (৩.১) এর কোনো সমাধান পাওয়া যাবে না। কাজেই আমরা পাই যেখানে $B \neq 0$:

$$e^{m} = e^{-m}$$

কিন্তু m কাল্পনিক না হলে এটি সম্ভব নয়। তাহলে মনে করি

$$m = ik\pi, \quad (i = \sqrt{-1})$$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান হলো

$$u(x, t) = e^{ik\pi x - k^2\pi^2 t}$$

এবং সাধারণ সমাধান হলো

$$u(x, t) = A\, e^{ik\pi x - k^2\pi^2 t} + Be^{-ik\pi x - k^2\pi^2 t}$$
$$= e^{-k^2\pi^2 t}(E \cos k\pi x + D \sin k\pi x) \qquad (৩.৭)$$

এখন প্রান্তিক শর্ত থেকে পাওয়া যায়,

$$u_x(0, t) = Dk\pi\, e^{-k^2\pi^2 t}$$

অথবা $0 = Dk\pi\, e^{-k^2\pi^2 t}$

অথবা $D = 0$

আবার

$$U_x(1, t) = -e^{-k^2\pi^2 t}\, Ek\pi \sin k\pi$$

অথবা $0 = E \sin k\pi$

অথবা $\sin k\pi = 0$, $E \neq 0$

$$k = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots ,$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান হলো

$$u(x, t) = E\, e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x \qquad (৩.৮)$$

অথবা
$$u_k(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x$$

অথবা
$$u_k(x, t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos k\pi x \qquad (৩.৯)$$

প্রান্তিক শর্ত $u(x, 0) = f(x)$ হতে পাওয়া যায়,

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\pi x \qquad (৩.১০)$$

যা একটি ফুরিয়ার সিরিজ।

যেখানে
$$a_k = \int_{-1}^{1} f(x) \cos k\pi x \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

তৃতীয় অংশ

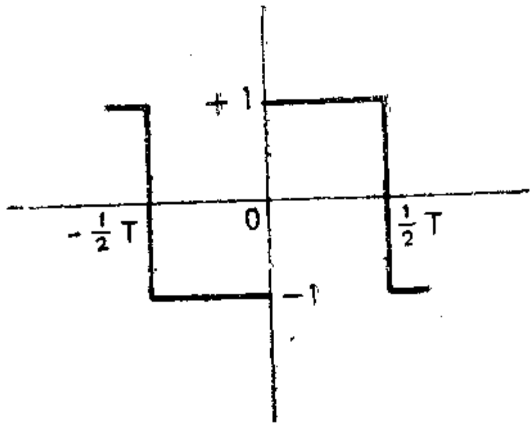
৩.১৩ পিরিয়ডিক তরঙ্গ আকারের বিশ্লেষণ

আমরা জানি যে (x) যখন পিরিয়ডিক অর্থাৎ $f(x + T) = f(x)$ তাহলে $f(x)$ কে ফুরিয়ার সিরিজ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{2\pi}{T} nx + b_n \sin\frac{2\pi}{T} nx\right)$$

হিসেবে প্রকাশ করা যায়। এর আলোকে আমরা কয়েকটি তরঙ্গ আকার নিয়ে আলোচনা করব।

(ক) বর্গ তরঙ্গ : ধরা যাক যে তরঙ্গের অবিসরণ (amplitude) একক এবং পিরিয়ড **T** (চিত্র ৩.১)।



চিত্র ৩.১ : বর্গ তরঙ্গ বৈসাদৃশ্য আকার।

উপরিউক্ত চিত্রে মূল বিন্দু যেভাবে আছে তাতে দেখা যায় যে ফাংশনটি অপ্রতিসম (antisymmetric) অথবা বিজোড় (odd)। কাজেই এর ফুরিয়ার সিরিজ হবে সাইন সিরিজ, ফলে n এর সকল মানের জন্য ($n = 0$ সহ) আমরা পাই $a_n = 0$

কাজেই

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

এছাড়া ফাংশন $f(x)$ নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$f(x) = -1,\ -\frac{T}{2} < x < 0$$

$$= 1,\ 0 < x < \frac{T}{2}$$

এবং $$f(x+T) = f(x)$$

অতএব

$$b_n = \frac{2}{T}\left\{\int_{-T/2}^{0}(-1)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx + \int_{0}^{T/2}(+1)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{T}\left\{\left[\frac{T}{2n\pi}\cos\frac{2\pi}{T}nx\right]_{-T/2}^{0}-\left[\frac{T}{2n\pi}\cos\frac{2\pi}{T}nx\right]_{0}^{T/2}\right\}$$

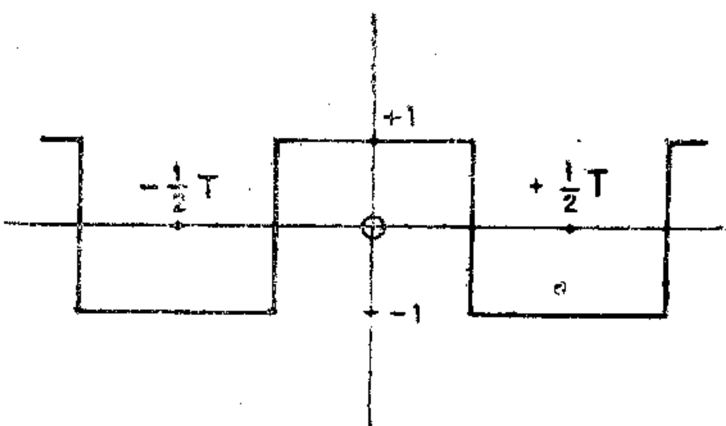
$$= \frac{1}{n\pi}\{(1-\cos(-n\pi))+(1-\cos n\pi)\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$= 0$, যখন n জোড়

$= \frac{4}{n\pi}$, যখন n বিজোড়

আমরা যদি চিত্র ৩.২ অনুসারে মূল বিন্দু বিবেচনা করি তাহলে ফাংশন $f(x)$ নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়.



চিত্র ৩.২ : বর্গ তরঙ্গ-সদৃশ-আকার।

$$f(x) = -1, -\frac{T}{2} < x < -\frac{T}{4}$$

$$= 1, -\frac{T}{4} < x < \frac{T}{4}$$

$$= -1, \frac{T}{4} < x < \frac{T}{2}$$

$$f(x+T) = f(x)$$

এক্ষেত্রে ফাংশন $f(x)$ হলো জোড়, কাজেই $b_n = 0$ এবং

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left\{\int_{-T/2}^{-T/4}(-1)dx + \int_{-T/4}^{T/4}(+1)dx + \int_{T/4}^{T/2}(-1)dx\right\}$$

$$= 0$$

এর অর্থ হলো যে, একটি সম্পূর্ণ চক্রের উপর $f(x)$ এর গড় মান হলো $\frac{1}{2}a_0$ যা স্পষ্টত শূন্য।

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{-T/4}(-1)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx + \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4}(+1)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$+ \frac{2}{T}\int_{T/4}^{T/2}(-1)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left\{-\left[\sin\frac{2\pi}{T}nx\right]_{-T/2}^{T/4}\right.$$

$$\left. + \left[\sin\frac{2\pi}{T}nx\right]_{-T/4}^{T/4} - \left[\sin\frac{2\pi}{T}nx\right]_{T/4}^{T/2}\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left\{-\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\frac{n\pi}{2} - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

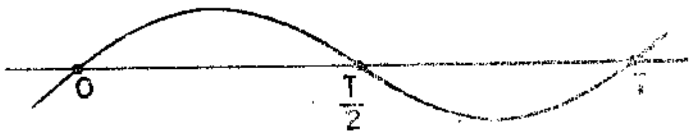
$= 0$, যখন n জোড়

$= +\dfrac{4}{n\pi}$, $n = 1, 5, 9, \cdots$

$= -\dfrac{4}{n\pi}$, $n = 3, 7, 11, \cdots$

(খ) সদৃশ তরঙ্গ-আকার : ৩.৩ চিত্রে যে তরঙ্গ-আকার রয়েছে তাতে আমরা তরঙ্গকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করতে পারি :

$$f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(-x)$$



চিত্র : ৩.৩

কাজেই

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f\left(x + \frac{T}{2}\right)\cos\frac{2\pi}{T}n\left(x + \frac{T}{2}\right)dx$$

$$+ \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} -f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx + n\pi\right)dx + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\left[\cos\frac{2\pi}{T}nx - \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx + n\pi\right)\right]dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx(1-\cos n\pi)dx$$

$= 0$, যখন n জোড় সংখ্যা।

অনুরূপভাবে পাওয়া যাবে

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx + \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f\left(x+\frac{T}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{T}n\left(x+\frac{T}{2}\right)dx$$

$$+ \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} -f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx + n\pi\right)dx + \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

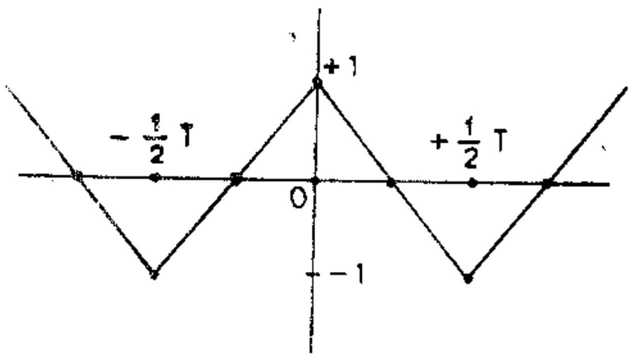
$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\left[\sin\frac{2\pi}{T}nx - \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx + n\pi\right)\right]dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}(1-\cos n\pi)dx$$

$= 0$, যখন n জোড় সংখ্যা।

কাজেই আমরা দেখতে পাই যে, $f\left(x+\frac{T}{2}\right) = -f(x)$ দ্বারা যে তরঙ্গের আকার প্রকাশ করা যায় সেই তরঙ্গের জোড় ফাংশনের অংশ নেই। যেমন পুশফুল (push-ful) অ্যামপ্লিফাইয়ারের বর্তনীতে উৎপন্ন তরঙ্গে জোড় ফাংশনের ঝামেলা নেই।

(গ) ত্রিভুজাকার তরঙ্গ : এ ধরনের তরঙ্গের চিত্র নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা যায় :



চিত্র ৩.৪ : ত্রিভুজাকার তরঙ্গ।

একে এভাবে প্রকাশ করা যায় যে

$$f(x) = 1 + \frac{4}{T}x, \quad -\frac{T}{2} < x < 0$$

$$= 1 - \frac{4}{T}x, \quad 0 < x < \frac{T}{2}$$

আমরা আরো দেখতে পাই, $f(-x) = f(x)$

অর্থাৎ ফাংশনটি হলো জোড়। কাজেই $b_n = 0$

এবং $$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}\left(1+\frac{4}{T}x\right)dx + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2}\left(1-\frac{4}{T}x\right)dx = 0$$

অর্থাৎ একটি পূর্ণ চক্রের উপর $f(x)$ এর গড় মান হলো $\frac{a_0}{2}$ যা স্পষ্টত শূন্য।

$$\text{আবার}\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx + \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} \frac{4}{T}x\,\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$- \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} \frac{4}{T}x\,\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{8}{T^2}\int_{T/2}^{0} (-x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,d(-x) - \frac{8}{T^2}\int_{0}^{T/2} x\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= -\frac{16}{T^2}\int_{0}^{T/2} x\,\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$a_n = -\frac{16}{T^2}\left\{\left[\frac{Tx}{2n\pi}\sin\frac{2\pi}{T}nx\right]_0^{T/2} - \frac{T}{2n\pi}\int_0^{T/2}\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{8}{\pi nT}\left[-\frac{T}{2n\pi}\cos\frac{2\pi}{T}nx\right]_0^{T/2}$$

$$= -\frac{4}{\pi^2 n^2}(1-\cos n\pi)$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2},\quad \text{যখন } n \text{ বিজোড়}$$

$$= 0,\quad \text{যখন } n \text{ জোড়}$$

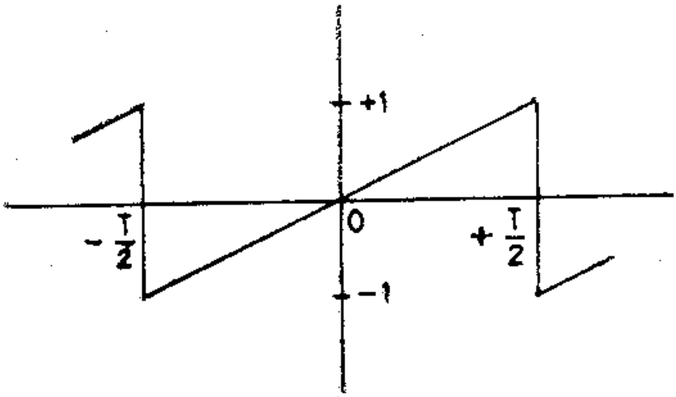
এটি লক্ষণীয় যে, $f\left(x+\frac{T}{2}\right) = -f(x)$

কাজেই জোড় ফাংশনের সকল অংশ শূন্য।

(ঘ) **করাত-দাঁত তরঙ্গ ঃ** সাধারণত ইলেকট্রনিক প্রকৌশলে এ ধরনের করাত-দাঁত তরঙ্গ সৃষ্টি হয় যা নিম্নোক্ত ফাংশন দ্বারা প্রকাশ করা যায় :

$$f(x)=\frac{2}{T}x, \quad -\frac{T}{2}<0<\frac{T}{2}$$

$$f(x+T)=f(x)$$



চিত্র ৩.৫ : করাত-দাঁত তরঙ্গ।

এক্ষেত্রে ফাংশন $f(x)$ হবে একটি বিজোড় ফাংশন। কারণ $f(-x)=-f(x)$ কাজেই $a_n=0$ এবং

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx=\frac{4}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2} x\sin\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$=\frac{4}{T^2}\left\{\left[-\frac{T}{2n\pi}x\cos\frac{2\pi}{T}nx\right]_{-T/2}^{T/2}+\frac{T}{2n\pi}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx\right\}$$

$$=-\frac{2}{Tn\pi}\left\{\frac{T}{2}\cos n\pi+\frac{T}{2}\cos(-n\pi)\right\}$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi$$

$$= \frac{2}{n\pi}, \text{ যখন } n \text{ বিজোড়}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}, \text{ যখন } n \text{ জোড়}$$

(৩) **পালস তরঙ্গের অসীম ট্রেইন ঃ** ব্যবহারিক প্রযুক্তিতে এ ধরনের তরঙ্গ প্রায়ই সৃষ্টি হয়ে থাকে। আমরা এই পাল্‌সের একক উচ্চতা, এর সময়কাল 2τ এবং পিরিয়ড T বিবেচনা করব। এক্ষেত্রে ফাংশন $f(x)$ দাঁড়াবে

$$f(x) = 0, \quad -\frac{T}{2} < x < -\tau$$

$$= 1, \quad -\tau < x < \tau$$

$$= 0, \quad \tau < x < \frac{T}{2}$$

$$f(x+T) = f(x)$$

এখানে ফাংশন $f(x)$ হলো জোড়, কাজেই $b_n = 0$ এবং

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = \frac{2}{T}\int_{-\tau}^{\tau} dx = \frac{4\tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx = \frac{2}{T}\int_{-\tau}^{\tau} \cos\frac{2\pi}{T}nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\frac{2\pi}{T}nx\right]_{-\tau}^{\tau} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{2\pi}{T}n\tau$$

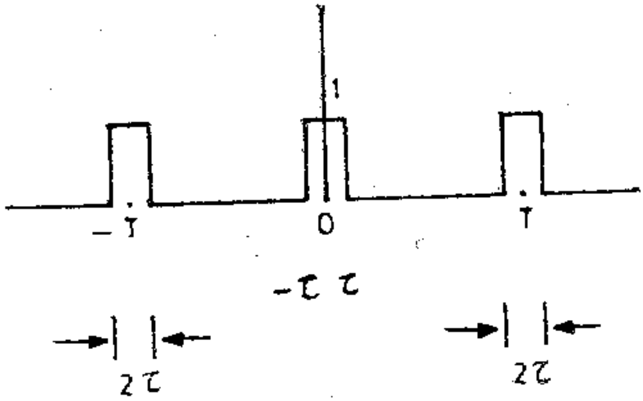
সংকীর্ণ পাল্‌সের বিষয়টি বিবেচনার জন্য τ কে অত্যন্ত স্বল্প হিসেবে ধরা যাক। এক্ষেত্রে আমরা দেখতে পাই যে,

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{2\pi}{T}n\tau \approx \frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}n\tau = \frac{4\tau}{T}$$

এখানে a_n এর মান n এর উপর নির্ভর করে না। কাজেই এই আলোকরশ্মি বা বর্ণালি (spectrum) কতকগুলি রেখার অসীম ধারা, যে রেখাগুলির উচ্চতা এবং

অবস্থান নির্দিষ্ট। সময়ের জন্য মূল যে ফাংশন বিবেচনা করা হয়েছিল তার আকারও একই ছিল। আরো উল্লেখ করা যায় যে, যদি $\tau \to 0$ হয় তবে $a_n \to 0$, ফলে সব তরঙ্গের অধিসরণ (amplitude) শূন্য।

৩.৬ চিত্র অনুসারে ডি.সি (d.c) অংশ থাকবে যা $\frac{1}{2}a_0$। যদি $\tau \to 0$ হয় তাহলে এটিও অনুপস্থিত হয়।



চিত্র ৩.৬ : পালস তরঙ্গের ট্রেইন।

৩.১৪ আধা-পাল্লায় ফুরিয়ার সাইন বা কোসাইন সিরিজ

যখন ফুরিয়ার আধা পাল্লায় (half range) কোনো ফাংশনকে বিস্তার করা হয়, তখন ফাংশনটি সাধারণত (0, L) ব্যবধানে অবস্থান করে। এ ব্যবধানটি (−L, L) ব্যবধানের অর্ধেক। এ কারণেই তাকে 'আধা পাল্লা' বলা হয়ে থাকে। এ পর্যায়ে ফাংশনটি জোড় অথবা বিজোড় হিসেবে বিবেচনা করা হয়। এক্ষেত্রে ফুরিয়ার সহগগুলি দাঁড়ায় :

(ক) ফুরিয়ার আধা পাল্লায় সাইন সিরিজের জন্য

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

(খ) ফুরিয়ার আধা পাল্লায় কোসাইন সিরিজের জন্য

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

দেখা যায় যে, আধা পাল্লায় ফুরিয়ার সাইন সিরিজ বা কোসাইন সিরিজ বিস্তারে কেবল হয় সাইন পদ থাকবে, না হয় কোসাইন পদ থাকবে।

উদাহরণ

১। $f(x)=\sin x,\ 0<x<\pi$, হলে একে ফুরিয়ার কোসাইন সিরিজে বিস্তার কর।

সমাধান : এটি ফুরিয়ার আধা পাল্লার কোসাইন সিরিজ। যেহেতু প্রদত্ত ফাংশনটি বিজোড়, কাজেই

$$b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$=-\frac{2(1+\cos n\pi)}{(n^2-1)\pi},\ n\neq 1$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{\pi}\quad \text{এবং}\quad a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=0$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\right)\cos nx$$

২। $f(x)=x,\ 0<x<2$ হলে একে ফুরিয়ার আধা পাল্লার (ক) সাইন সিরিজ (খ) কোসাইন সিরিজে বিস্তার কর।

সমাধান : (ক) এক্ষেত্রে ফুরিয়ার সাইন সিরিজের জন্য ফুরিয়ার সহগগুলি হলো $a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\left[x\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2+\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=(-1)^n\left(-\frac{4}{n\pi}\right)$$

অতএব ফুরিয়ার সাইন সিরিজ হলো

$$f(x)=x=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\cdots\cdots\right)$$

(খ) ফুরিয়ার কোসাইন সিরিজের জন্য

$b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= -\frac{8}{n^2\pi^2},\ \text{যখন } n \text{ বিজোড় সংখ্যা}$$

অতএব ফুরিয়ার কোসাইন সিরিজ হলো

$$f(x) = x = \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\ n \text{ বিজোড়}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\ n \text{ বিজোড়}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \cdots\cdots\right)$$

৩। ২(খ) থেকে পার্সিভালের অভেদ লিখে দেখাও যে

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

প্রমাণ : পার্সিভালের অভেদ হলো

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

অথবা $$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{n^4\pi^4}$$

অথবা $$\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

অথবা $$\frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots\right)$$

অথবা $$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

উদাহরণ ৪

$f(x) = \pi x - x^2$, $x = 0$ এবং $x = \pi$ কে ফুরিয়ার অর্ধ পাল্লার সিরিজে প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি

$$\pi x - x^2 = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots\cdots$$

একে $\sin nx$ দ্বারা গুণ করে $(0, \pi)$ ব্যবধানের উপর সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\sin nx\,dx = a_n\int_0^{\pi}\sin^2 nx\,dx$$

বামপক্ষ $$= \int_0^{\pi}(\pi x - x^2)\sin nx\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{n}(\pi x - x^2)\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{n^2}(\pi - 2x)\sin nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$= 0 - \frac{2}{n^3}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{n^3}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{4}{n^3}\text{ , যখন } n \text{ বিজোড়}$$

$$= 0\text{ , যখন } n \text{ জোড়}$$

ডানপক্ষ $= a_n\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx = \frac{a_n}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2nx)\, dx$

$$= \frac{a_n}{2}\left\{\left[x\right]_0^\pi - \left[\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^\pi\right\} = \frac{a_n \pi}{2}$$

অতএব $\quad a_n = \frac{8}{\pi n^3}$, যখন n বিজোড়

$$= 0\text{ , যখন } n \text{ জোড়}$$

কাজেই নির্ণেয় ফুরিয়ার সিরিজ হলো

$$\pi x - x^2 = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{27}\sin 3x + \frac{1}{125}\sin 5x + \cdots\cdots\right)$$

উদাহরণ ৫

সমাধান কর :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\text{ , } z = 0 \text{ যখন } x = 0\text{ , } y = \infty$$

$$z = \pi x - x^2\text{ , } y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

(৩.১)

সমাধান : মনে করি $\quad z = e^{mx+ny}$

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$(m^2+n^2)\, e^{mx+ny} = 0$$

অথবা $\qquad m^2 + n^2 = 0$

শর্ত $y = \infty$ হতে দেখা যায় যে n বাস্তব এবং ঋণাত্মক হওয়া উচিৎ। মনে করি $n = -p$, তাহলে

$$m = \pm ip$$

অতএব $\qquad z = e^{-py}\left(Ae^{ipx} + Be^{-ipx}\right)$ একটি সমাধান।

$$= e^{-py}\left(E\cos px + F\sin px\right)$$

কিন্তু, শর্ত $z = 0$ যখন $x = 0$, হতে আমরা পাই, $E = 0$,
কাজেই নির্ণেয় সমাধান হলো

$$z = F e^{-py} \sin px$$

অথবা সাধারণ পদের জন্য আমরা লিখতে পারি

$$z = F_p e^{-py} \sin px \qquad (৩.২)$$
$$(p = 1, 2, 3, \cdots \cdots)$$

আরো একটি শর্ত আছে যা হলো

$$z = \pi x - x^2 \quad \text{যখন } y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

কাজেই $\quad \pi x - x^2 = F_p \sin px$

অথবা $\quad \pi x - x^2 = F_1 \sin x + F_2 \sin 2x + F_3 \sin 3x + \cdots \cdots \qquad$ (৩.৩)

এখন (৩.৩) কে ফুরিয়ার আধা পাল্লার সিরিজের তত্ত্ব অনুসারে প্রকাশ করলে পাওয়া যায় (উদাহরণ ৪)

$$F_p = \frac{8}{\pi p^3}, \ (p = 1, 3, 5, \cdots \cdots \cdots)$$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান হলো:

$$z = \pi x - x^2 = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{27} \sin 3x + \frac{1}{125} \sin 5x + \cdots\cdots \right) \qquad (৩.৪)$$

প্রশ্নমালা

ফুরিয়ার আধা পাল্লার সিরিজে প্রকাশ কর :

১। (ক) x (খ) x^2 (গ) e^x

(ঘ) $f(x) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ এবং $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$

$$= (4x - \pi)(3\pi - 4x), \ \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$$

২। ফুরিয়ার আধা পাল্লার সিরিজের মাধ্যমে সমাধান কর।

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \ V \neq \infty \text{ যখন } t = \infty$$

$V = 0$ যখন $x = 0$ অথবা π, t এর সকল মানের জন্য
$V = \pi x - x^2$; $t = 0$ এবং $0 \leqslant \quad \leqslant \pi$

চতুর্থ অধ্যায়

ফুরিয়ার রূপান্তর

৪.১ কোনো ব্যবধানের ফুরিয়ার সিরিজ

তৃতীয় অধ্যায়ে ফুরিয়ার সিরিজ সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। পরবর্তী আলোচনার জন্য আমরা নিম্নোক্ত আকারের ফুরিয়ার সিরিজ বিবেচনা করব :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{nx}{L} + b_n \sin\frac{nx}{L}\right) \qquad (৪.১)$$

এই সিরিজটি এমন একটি ফাংশন $f(x)$ প্রকাশ করে যার পিরিয়ড হলো $2L\pi$। তৃতীয় অধ্যায় অনুসারে ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয় করলে পাওয়া যায়,

$$a_0 = \frac{1}{\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L} f(x)\cos\frac{nx}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L} f(x)\sin\frac{nx}{L}\,dx$$

৪.২ ফুরিয়ার সমাকলন সূত্র

$f(x)$ কোনো ফাংশনকে ফুরিয়ার সিরিজে বিস্তার করার জন্য ফাংশনটিকে অবশ্যই পিরিয়ডিক হতে হয়। আর যদি ফাংশন পিরিয়ডিক না হয়, তাহলে অনেক ক্ষেত্রেই এটি সম্ভব যে, তাকে ফুরিয়ার সিরিজের মতো সমাকলন আকারে বিস্তার করা যায়। এ ধরনের বিস্তারের জন্য ফাংশন $-\infty$ থেকে $+\infty$ ব্যবধানের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকতে হবে। যদি ফাংশন কোনো সসীম ব্যবধানে থাকে তবে অবশিষ্ট ব্যবধান অসীম পর্যন্ত একে শূন্য ধরে তার বিস্তার করলেই যথার্থ হবে।

৪.৩ ফুরিয়ার সিরিজের সাথে ফুরিয়ার সমাকলন বিস্তারের সামঞ্জস্য

ফুরিয়ার সিরিজ এবং ফুরিয়ার সমাকলন বিস্তারের মধ্যে সামঞ্জস্যের জন্য প্রতীক যথাক্রমে Σ, $\int$, পূর্ণসংখ্যা k বা n, চলক y, ব্যবধান $(-\pi, \pi)$ এবং $(-\infty, \infty)$ ব্যবহার করা হয়। এই দুটি বিষয় পাশাপাশি দেখানো হলো।

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad \int_0^{\infty}\left[a(y)\cos yx+b(y)\sin yx\right]dy$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos xy\,dx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,\quad b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin xy\,dx$$

এখন যদি আমরা a_k, b_k, $a(y)$, $b(y)$ এর সমাকলন মান ফুরিয়ার সিরিজ এবং ফুরিয়ার সমাকলন বিস্তারে যথাক্রমে অন্তর্ভুক্ত করি তাহলে এরা দাঁড়ায়

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos k(x-t)dt,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos y(x-t)dt$$

উপরিউক্ত বিষয়গুলি স্মরণ রাখলে ফুরিয়ার সমাকলন বিস্তার মনে রাখা সহজ হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, ফুরিয়ার সিরিজের যোগফল এবং ফুরিয়ার সমাকলন বিস্তারের মান হলো $f(x)$।

৪.৪ ফুরিয়ার সমাকলন সূত্র নির্ণয়

উপরিউক্ত বিস্তার (৪.১) থেকে আমরা পাই

$$f(x)=\frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L}f(t)\left(\cos\frac{nx}{L}\cos\frac{nt}{L}+\sin\frac{nx}{L}\sin\frac{nt}{L}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi L}\int_{-\pi L}^{\pi L} f(t)\cos\frac{n(x-t)}{L}\,dt \qquad (৪.২)$$

মনে করি $L \to \infty$, তাহলে ডানদিকের সিরিজ এমন যোগ অংকের মত বৈশিষ্ট্য প্রদর্শন করবে যা দ্বারা রিমান সমাকলন পাওয়া যায়। প্রকৃতপক্ষে যদি আমরা ধরি

$u_n = \frac{n}{L}$, তাহলে যোগফলটি দাঁড়ায়

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)\,\phi(u_n) \qquad (৪.৩)$$

যেখানে
$$\frac{1}{L} = \frac{n+1}{L} - \frac{n}{L} = u_{n+1} - u_n$$

এবং
$$\phi(u_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi L}^{\pi L} f(t)\cos u_n(x-t)\,dt$$

কাজেই
$$\phi(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi L}^{\pi L} f(t)\cos u(x-t)\,dt$$

এখন যদি আমরা লিমিট $L \to \infty$ গ্রহণ করি এবং সম্ভাব্য যোগটি একটি অসীম সিরিজ হয় তাহলে আমরা পাই

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt \qquad (৪.৪)$$

বিস্তার (৪.৪) কে ফুরিয়ার সমাকলন সূত্র বলে। এটি একটি ফাংশন $f(x)$ যা $(-\infty, \infty)$ অসীম পিরিয়ডের উপর বিস্তৃত যেমন ফুরিয়ার সিরিজ সসীম পিরিয়ডের উপর বিস্তৃত।

উদাহরণ

$$f(t) = 1, \quad |t| \leq 1,$$
$$f(t) = 0, \quad |t| > 1$$

তাহলে f(x) এর ফুরিয়ার সমাকলন হলো

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dy\int_{-1}^{1}(\cos xy\cos ty+\sin xy\sin ty)\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xy\,dy\int_0^1\cos ty\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin y\cos xy\,dt}{y}$$

এই সমাকলনটি বিচ্ছিন্নতার বিন্দুগুলি ছাড়া f(x) এর সমান। বিচ্ছিন্নতা বিন্দুতে এর মান হবে ফাংশনের ডানপক্ষ এবং বামপক্ষের লিমিটের (limit) গড় মান।

এখানে উল্লেখ করা যায় যে, সমাকলনটি কোথাও অভিসারী (convergent) হবে কি না তার পূর্বশর্ত নেই। তবে আমরা আশা করব, f(x) এর শর্ত এমন হবে যার ফলে সমাকলনটি f(x) এর সাথে অভিসারী হয়।

৪.৫ ফুরিয়ার রূপান্তর

যদি f(x) একটি জোড় ফাংশন হয়, $f(-x)=f(x)$, তাহলে ফুরিয়ার সমাকলন (৪.৪) দাঁড়ায়

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,(\cos ux\cos ut+\sin ux\sin ut)\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos xu\,du\int_0^\infty\cos ut\,f(t)\,dt \qquad (৪.৫)$$

এটি হলো ফুরিয়ার কোসাইন (cosine) সূত্র। অনুরূপভাবে যদি f(x) একটি বিজোড় ফাংশন হয়, $f(-x)=-f(x)$, তবে আমরা পাই

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin xu\,du\int_0^\infty\sin ut\,f(t)\,dt \qquad (৪.৬)$$

যাকে ফুরিয়ার সাইন (sine) সূত্র বলে।

আমরা যদি আরো লিখি যে,

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos ut\ f(t)\ dt \qquad (৪.৭)$$

তাহলে (৪.৫) থেকে আমরা পাই

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos xu\ g(u)\ du \qquad (৪.৮)$$

এখানে বিশেষ একটি বিষয় হলো যে, ফাংশন $f(x)$ এবং $g(u)$ এর মধ্যে একটি বিপরীত ধর্মী সম্পর্ক আছে তা হলো

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos ux\ f(x)\ dx \qquad (৪.৯)$$

যা সমীকরণ (৪.৭)। এক জোড়া ফাংশন যা সমীকরণ (৪.৮) এবং (৪.৯) দ্বারা সম্পর্কীত তাদেরকে একে অপরের ফুরিয়ার কোসাইন (cosine) রূপান্তর বলে।

অনুরূপভাবে (৪.৬) হতে আমরা পাই

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sin ut\, f(t)dt \qquad (৪.১০)$$

যার ফলে দাঁড়ায় $$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\sin xu\, h(u)du \qquad (৪.১১)$$

আর এক জোড়া ফাংশন যা সমীকরণ (৪.১০) এবং (৪.১১) দ্বারা বিপরীত ধর্মীয় সম্পর্ক স্থাপন করে তাদেরকে একে অপরের ফুরিয়ার সাইন (sine) রূপান্তর বলে।

ফুরিয়ার সমাকলন সূত্র (৪.৪) কে সমতুলভাবে লেখা যায় যে,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{u=0}^{\infty}\int_{t=-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(x-t)dtdu \qquad (৪.১২)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}\,du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{iut}\,dt \qquad (৪.১৩)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{iu(t-x)}\, dt\, du \qquad (৪.১৪)$$

এখন (৪.১৩) থেকে পাওয়া যায়,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\ e^{iut}\, dt \qquad (৪.১৫)$$

অথবা
$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\ e^{-itu}\, du \qquad (৪.১৬)$$

একজোড়া ফাংশন যা (৪.১৫) এবং (৪.১৬) সমীকরণ দ্বারা বিপরীতধর্মীভাবে সম্পর্কযুক্ত তাদেরকে একে অন্যের ফুরিয়ার সমাকলন রূপান্তর বলে।

এখানে একটি বিষয় লক্ষণীয় যে, সমীকরণ (৪.৭) এবং (৪.৮)-এ $g(u)$ এবং $f(x)$কে পরস্পর বদল করা যায়। অর্থাৎ চলক u এবং x পরস্পর বদল করলে ফাংশন দুটিও অনুরূপভাবে বদল হয়ে যাবে। ফুরিয়ার রূপান্তরের এটি একটি বড় ধর্ম। এ কারণে $g(u)$ কে $f(x)$ এর ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর বলে। আবার $f(x)$ কে $g(u)$ এর ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর বলা হয়। উপরিউক্ত রূপান্তর (৪.৭) এবং (৪.৮) কে ফাংশন $g(u)$ এবং $f(x)$ এর বিপরীতযোগ্য ধর্মের জন্য একে অপরের বিপরীত (reciprocal) সম্পর্ক বলে। অনুরূপভাবে (৪.১৫) এবং (৪.১৬) সমীকরণেও $F(u)$ এবং $G(t)$ ফাংশনের একই ধর্মের জন্য (৪.১৫) এবং (৪.১৬) কে একে অপরের বিপরীত সম্পর্ক বলে।

উদাহরণ

১। ফুরিয়ার কোসাইন এবং সাইন রূপান্তর কর যখন $f(x) = e^{-\alpha x}$

উত্তর ঃ (i) ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর হলো

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g(t)\cos vt\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\cos vt\, dt$$

আংশিক সমাকলনের সূত্র থেকে পাওয়া যায়,

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{u^2 + v^2}$$

এর বিপরীত সম্পর্ক হলো

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \cos vt \, dv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{u^2 + v^2} \cos vt \, dv$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{u \cos vt}{u^2 + v^2} dv$$

অথবা $$e^{-ut} = \frac{2u}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos vt \, dv}{u^2 + v^2}$$

(ii) ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর হলো

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(t) \sin vt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-ut} \sin vt \, dt$$

আংশিক সমাকলনের দ্বারা আমরা পাই

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v}{u^2 + v^2}$$

এর বিপরীত সম্পর্ক হলো

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \sin vt \, dv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v}{u^2 + v^2} \sin vt \, dv$$

অথবা $$e^{-ut} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{v \sin vt \, dv}{u^2+v^2}$$

২। ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর নির্ণয় কর

যেখানে $f(x) = e^{-x^2}$

উত্তর : ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর হলো

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t) \cos xt \, dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos xt \, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}$$

এখন ফুরিয়ার বিপরীত কোসাইন সম্পর্ক হলো

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g(x) \cos xt \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4} \cos xt \, dx$$

অথবা $$e^{-t^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x^2/4} \cos tx \, dx$$

অথবা $$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2/4} \cos xt \, dt$$

এখানে বলার অপেক্ষা রাখেনা যে, নির্দিষ্ট সমাকলনের মধ্যে চলক পরিবর্তন করলে নির্দিষ্ট সমাকলনের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। এই ধর্ম ব্যবহার করে উপরের পরিবর্তনগুলি নিয়ে আসা হয়েছে।

৩। ফুরিয়ার রূপান্তর নির্ণয় কর যখন

$$f(x) = 1, \quad |x| < a$$
$$= 0, \quad |x| > a$$

উত্তর : ফুরিয়ার সমাকলন রূপান্তর ব্যবহার করলে আমরা পাই

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iux}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{iux} dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{iux}\, dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-a}^{0} 1 .\, e^{iux} dx + \int_{0}^{a} 0 .\, e^{iux} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{iux}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{iux}}{iu} \right]_{-a}^{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iua} - e^{-iua}}{iu}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{iua} - e^{-iua}}{2\, iu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin ua}{u}, \quad u \neq 0$$

এবং $F(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot a \left(\dfrac{\sin ua}{ua} \right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot a, \quad u \to 0$

এর বিপরীত সম্পর্ক হলো

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-ixu}\, du$$

অথবা $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, . \, \frac{\sin au}{u} du$$

অথবা $$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{e^{-ixu} \sin au \; du}{u} \qquad (i)$$

যদি $x = 0$ হয় তবে

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin au}{u} du = \pi$$

যদি $a = 1$ হয় তবে

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin u}{u} = \pi$$

আবার (i) হতে আমরা আরো পাই যে

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin au}{u} e^{-ixu} du = \pi$$

অথবা $$\int_{-a}^{a} \frac{\sin au}{u} (\cos xu - i \sin xu) \, du = \pi$$

অথবা $$\int_{-a}^{a} \frac{\sin au \cos xu}{u} du - i \int_{-a}^{a} \frac{\sin au \sin xu}{u} du = \pi$$

অথবা $$\int_{-a}^{a} \frac{\sin au \cos xu}{u} du = \pi \qquad (ii)$$

(উভয় পক্ষ থেকে বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ সমান করে)

এক্ষেত্রেও যদি $x = 0$ হয় তবে আমরা পাই

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin au}{u}\, du = \pi$$

এবং $a = 1$ হলে পাওয়া যায়,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin u}{u}\, du = \pi$$

৩। প্রমাণ কর যে

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2+1}\, du = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

উত্তর : e^{-x} এর জন্য ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর নির্ণয় করে পাওয়া যায়

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} g(u) \cos vu\, du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-u} \cos vu\, du$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{v^2+1} \right)$$

(আংশিক সমাকলনের দ্বারা মান নির্ণয় করে)

ফুরিয়ার রূপান্তরের বিপরীত সম্পর্ক হতে আমরা পাই

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(v) \cos vu\, dv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{v^2+1}\, dv$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv \cos vu}{v^2+1}$$

অথবা $$e^{-u} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv \cos vu}{v^2+1}$$

অথবা $$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\cos vx\, dv}{v^2+1}$$

অথবা $$\int_0^{\infty} \frac{\cos vx\, dv}{v^2+1} = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

৫। ফুরিয়ার রূপান্তর ব্যবহার করে সমাধান কর :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ ,\ -\infty < x < \infty\ ,\ t > 0\ ,$$

$$v = f(x) \text{ যখন } t = 0$$

এবং $$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ যখন } x = \pm\infty$$

সমাধান : ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর ব্যবহার করে আমরা পাই

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial t} \sin px\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin px\, dx$$

অথবা $$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} v \sin px\, dx$$

$$= \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sin px \right]_{-\infty}^{\infty} - p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} \cos px\, dx$$

$$= 0 - p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} \cos px \, dx$$

$$= -p \left[v \cos px \right]_{-\infty}^{\infty} - p^2 \int_{-\infty}^{\infty} v \sin px \, dx$$

অথবা $$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} v \sin px \, dx = -p^2 \int_{-\infty}^{\infty} v \sin px \, dx$$

মনে করি $$u = \int_{-\infty}^{\infty} v \sin px \, dx \qquad \text{(i)}$$

অতএব $$\frac{\partial u}{\partial t} = -p^2 u$$

অথবা $$u(p, t) = k e^{-p^2 t} \qquad \text{(ii)}$$

এখানে $t = 0$ মান বসিয়ে আমরা পাই

$$u = k$$

কাজেই $$u(p, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) \sin px \, dx$$

অথবা $$k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin px \, dx \qquad \text{(ii)}$$

অতএব $$u = k e^{-p^2 t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 t} f(x) \sin px \, dx \qquad \text{iv)}$$

এখন (i) এর বিপরীত সম্পর্ক হতে পাওয়া যায়,

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} u \sin px \, dx$$

অথবা $$v(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 t} f(x) \sin^2 px \, dx \qquad (v)$$

প্রশ্নমালা

১। ফুরিয়ার সমাকলনের সাহায্যে প্রমাণ কর যে

$$\int_0^{\infty} \frac{y \sin xy}{1+y^2} dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-x} \\ -\frac{\pi}{2} e^{x} \end{cases}$$

২। দেখাও যে

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

৩। $\frac{1}{\sqrt{x}}$ এর জন্য ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর নির্ণয় কর।

৪। ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর নির্ণয় কর :

$$f(x) = \cos x, \ |x| < \pi ; \ f(x) = 0, \ |x| > \pi$$

৫। $$\int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos y(x-t) \, dt = ?$$

উত্তর : $\frac{\pi(\sin x)^2}{x^2}$

৬। $$\lim_{R \to \infty} \int_0^1 \frac{\sin Rx}{\sqrt{x}} dx = ?$$

উত্তর : 0

৭। $$\lim_{R \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t \sin Rt}{t^3} dt = ?$$

উত্তর : π

৮। ধ্রুবক সহগ ছাড়া দেখাও যে $e^{-x^2/2}$ হলো এর ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর।

৯। দেখাও যে, $x^{-\frac{1}{2}}$, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $\operatorname{sech}\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ হলো তাদের নিজস্ব ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর।

১০। দেখাও যে, $x^{-\frac{1}{2}}$, $xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ হলো তাদের নিজস্ব ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর।

৪.৬ সসীম ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর

মনে করি সসীম ব্যবধানের উপর $F(x)$ হলো ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন। মূলবিন্দু এবং দৈর্ঘ্যের এককের বিবেচনার প্রেক্ষিতে মনে করি ব্যবধানের প্রান্তবিন্দুগুলি যথাক্রমে $x=0$ এবং $x=\pi$, অর্থাৎ ব্যবধানটি হলো $0<x<\pi$। এই ব্যবধানের উপর ফাংশন $F(x)$ এর ফুরিয়ার সাইন রূপান্তরের সূত্র হলো

$$\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx\,,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

যাকে $S\{F(x)\}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই রূপান্তরের ফলে $f_S(n)$ আর একটি ফাংশন পাওয়া যায় যাকে $F(x)$ এর ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর বলে। অর্থাৎ

$$S\{F(x)\}=\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx=f_s(n),\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad (১)$$

উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, $F(x)=1$ হলে ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর, $0\leqslant x\leqslant\pi$ এর উপর হবে

$$f_s(n)=\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=-\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1-(-1)^n}{n},\ (n=1,2,\ \cdots\cdots)$$

আবার $F(x)=x,\ (0<x<\pi)$ এর উপর ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর হলো

$$f_s(n)=\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx$$

$$=\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n},\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

মনে করি $F'(x)$ খণ্ড অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং বিচ্ছিন্ন বিন্দু x_0 এ $F(x)$ এর মান হলো এর গড় মান

$$F(x_0)=\tfrac{1}{2}\left[F(x_0+0)+F(x_0-0)\right],\ (0<x_0<\pi)$$

তাহলে ফুরিয়ার সিরিজের তত্ত্ব অনুসারে আমরা পাই

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\int_0^{\pi}F(y)\sin ny\,dy,\ (0<x<\pi)$$

ফুরিয়ার সাইন রূপান্তরের সূত্র (১) থেকে আমরা দেখতে পাই যে,

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin nx\ ,\ (0<x<\pi) \qquad (২)$$

সূত্র (২) হলো সূত্র (১), অর্থাৎ ফুরিয়ার সাইন রূপান্তরের বিপরীত সূত্র। একে $S^{-1}\{f_s(n)\}$ হিসেবে লেখা হয়ে থাকে। কাজেই যদি

$$f_s(n)=S\{F(x)\}$$

হয়, তবে এর বিপরীত রূপান্তর হবে

$$S^{-1}\{f_s(n)\}=F(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin nx$$

এখানে সূত্র (১) এবং (২) থেকে পরিষ্কার যে, ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর $S\{F(x)\}$ এবং এর বিপরীত রূপান্তর $S^{-1}\{f_s(n)\}$ উভয়েই যোগাশ্রয়ী রূপান্তর।

ডিরিচলেট সমাকলনের পুনঃ মানের শর্ত থেকে আমরা দেখতে পাই যে, যখন $F(x)$ স্বশু অবিচ্ছিন্ন তখন

$$\lim_{n \to \infty} f_s(n) = 0$$

কোনো ফাংশন $F(x)$ এর যে কোনো ব্যবধান $0 < x < L$ এর উপর ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর হলো

$$\int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = S_t\{F(x)\} \qquad (৩)$$

উদাহরণস্বরূপ যদি $F(x) = x$, $(0 < x < L)$ হয়, তবে এর ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর হবে

$$S_t\{F(x)\} = \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$= \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$= \frac{L^2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots \cdots)$$

৪.৭ ফুরিয়ার সাইন রূপান্তরের প্রক্রিয়াগত ধর্ম

$F(x)$ এর সসীম ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর হলো

$$\int_0^{\pi} F(x) \sin nx\, dx, \ n = 1, 2, 3, \cdots \cdots$$

যদি $F(x)$ এবং $F'(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $F''(x)$ ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে

$$\int_0^{\pi} F''(x) \sin nx\, dx$$

$$= \Big[F'(x) \sin nx \Big]_0^{\pi} - n \int_0^{\pi} F'(x) \cos nx\, dx$$

$$= \Big[-n \cos nx \; F(x)\Big]_0^{\pi} - n^2 \int_0^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$$

কাজেই এর মৌলিক গঠন ধর্ম হলো

$$S\{F''(x)\} = -n^2 S\{F(x)\} + n[F(0) - (-1)^n F(\pi)] \qquad (১)$$

যেখানে S ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর বুঝায়।

উপপাদ্য ৯

সসীম ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর অন্তরকরণ আকার $F''(x)$-কে বীজগাণিতিক সরল রূপান্তর $f_s(n)$ এবং প্রান্তিক মান $F(0)$ এবং $F(\pi)$ এর মাধ্যমে

$$S\{F''(x)\} = -n^2 f_s(n) + n[F(0) - (-1)^n F(\pi)]$$

তে রূপান্তর করে, যেখানে $F(x)$, $F'(x)$ ফাংশন দুটি $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ব্যবধানে অবিচ্ছিন্ন এবং $F''(x)$ উক্ত ব্যবধানে ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন।

যখন $F''(x)$ উপপাদ্যে $F(x)$ এর উপর আরোপিত শর্ত পূরণ করে তখন আমরা (১) সমীকরণে $F(x)$ কে $F''(x)$ দ্বারা সরিয়ে দিতে পারি :

$$S\{F^{iv}(x)\} = -n^2 S\{F''(x)\} + n[F''(0) - (-1)^n F''(\pi)]$$

এভাবে আমরা পর্যায়ক্রমিক রূপান্তর সূত্র নির্ণয় করতে পারি যা দাঁড়ায়

$$S\{F^{iv}(x)\} = n^4 f_s(n) - n^3[F(0) - (-1)^n F(\pi)] + n[F''(0) - (-1)^n F''(\pi)]$$

উদাহরণস্বরূপ যখন $F(x) = x^2$ তখন $F''(x) = 2$ এবং

$$S\{2\} = -n^2 S\{x^2\} - n(-1)^n \pi^2$$

যেহেতু

$$S\{2\} = 2S\{1\} = 2[1 - (-1)^n]/n$$

তাহলে আমরা পাই

$$S\{x^2\} = \frac{\pi^2}{n}(-1)^{n-1} - \frac{2}{n^3}[1 - (-1)^n]$$

উপপাদ্য ৯(ক)

যদি ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন $F(x)$ এর সাইন রূপান্তর $f_s(n)$ হয় $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ তাহলে

$$S^{-1}\left\{\frac{f_s(n)}{n^2}\right\} = \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t} F(r)\,dr\,dt - \int_0^{x}\int_0^{t} F(r)\,dr\,dt$$

$$= \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - r)\ F(r)\,dr - \int_0^{x} (x - r)\ F(r)\,dr$$

উপরিউক্ত উপপাদ্য সহজভাবেই যাচাই করা যায়। কারণ যে কোনো সমাকলন আকার একটি ফাংশন $Y(x)$ প্রকাশ করে যা উপপাদ্য ১ এর শর্তগুলি পূরণ করে এবং $Y''(x) = -F(x)$, $Y(0) = Y(\pi) = 0$ । কাজেই

$$S\{-F(x)\} = -n^2\ S\{Y(x)\}$$ । যদি

$$\frac{f_s(n)}{n^2} = y_s(n) \text{ এবং } -n^2 y_s(n) = -f_s(n)$$

লেখা যায় তাহলে উপপাদ্য ১(ক) পাওয়া যায়, যেখানে উপপাদ্য ১ এর আলোকে $Y(x)$ হবে নিম্নোক্ত সমস্যার সমাধান :

$$Y''(x) = -F(x),\ Y(0) = Y(\pi) = 0$$

৪.৮ সসীম ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর

ফাংশন $F(x)$ এর জন্য ব্যবধান $0 < x < \pi$ এর উপর ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর হলো

$$C\{F(x)\} = \int_0^{\pi} F(x)\cos nx\,dx\ ,\quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad (১)$$

যেখানে C কোসাইন রূপান্তর বুঝায়। এই প্রক্রিয়া আর একটি ফাংশন $f_c(n)$ তৈরি করে যা ফুরিয়ার কোসাইন নামে অভিহিত। অর্থাৎ

$$C\{F(x)\} = \int_0^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = f_c(n)$$

উদাহরণস্বরূপ যদি $F(x) = 1$ হয় তবে

$$f_c(n) = \int_0^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \int_0^{\pi} \cos nx\,dx$$

$$= \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin n\pi - \sin 0}{n}$$

$$= 0\ ,\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

আবার $$f_c(0) = \int_0^{\pi} \cos nx\, dx = \int_0^{\pi} \cos 0x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} dx = \Big[\, x \,\Big]_0^{\pi} = \pi$$

অথবা $$f_c(0) = \pi\,,\ (n = 0)$$

যদি $F(x) = x$ হয়, তবে আমরা পাই

$$f_c(n) = \int_0^{\pi} F(x) \cos nx\, dx = \int_0^{\pi} x \cos nx\, dx$$

$$= -\frac{1-(-1)^n}{n^2}\,,\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ \cdots)$$

এবং $$f_c(0) = \frac{\pi^2}{2}\,,\ (n = 0)$$

এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে, $f_c(0)/\pi$ হলো ব্যবধান $(0, \pi)$ এর উপর $F(x)$ এর গড় মান.

$$\frac{1}{\pi} f_c(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(x)\, dx$$

আরো দেখা যায় যে, $F(x) + A$ এবং $F(x)$ এর ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর সমান যদি n শূন্য না হয় এবং যেখানে A ধ্রুবক। কারণ

$$C\{F(x) + A\} = f_c(n)\,,\qquad (n \neq 0)$$

$$C\{F(x) + A\} = f_c(0) + \pi A,\ (n = 0)$$

বিপরীত ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর $F(x) = C^{-1}\{f_c(n)\}$ হলো সরাসরি ফুরিয়ার কোসাইন সিরিজ

$$F(x) = C^{-1}\{f_c(n)\} = \frac{f_c(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos nx\,,\quad (0 < x < \pi) \tag{২}$$

যেখানে $F(x)$ এবং $F'(x)$ ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন এবং যে কোনো বিচ্ছিন্ন বিন্দুতে $(x = x_0)$ $F(x)$ এর মান হবে এর গড় মান

$$F(x_0) = \frac{1}{2}\left[F(x_0 + 0) + F(x_0 - 0)\right], \quad 0 < x < \pi$$

ফুরিয়ার সাইন রূপান্তরের মত প্রত্যেক ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন $F(x)$ এর জন্য

$$\lim_{n \to \infty} f_c(n) = 0$$

৪.৯ ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তরের প্রক্রিয়াগত ধর্ম

$F(x)$ এর সসীম ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তরের সূত্র হলো

$$\int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots \cdots)$$

এক্ষেত্রে
$$C\{F''(x)\} = \int_0^{\pi} F''(x) \cos nx \, dx \tag{১}$$

যেখানে $0 < x \leqslant \pi$ এবং C এর অর্থ হলো কোসাইন রূপান্তর। এখন (১) কে আংশিক সমাকলন করে আমরা পাই

$$C\{F''(x)\} = -n^2 C\{F(x)\} - F'(0) + (-1)^n F'(\pi) \tag{২}$$

যখন $F(x)$ এবং $F'(x)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন এবং $F''(x)$ ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন। যদি $F''(x)$ এবং $F'''(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $F^{iv}(x)$ ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে (২) সমীকরণে $F(x)$ কে $F''(x)$ দ্বারা সরিয়ে দিলে আমরা পাই

$$C\{F^{iv}(x)\} = n^4 f_c(n) + n^2\left[F'(0) - (-1)^n F'(\pi)\right]$$
$$- F'''(0) + (-1)^n F'''(\pi)$$

এভাবে পর্যায়ক্রমে উচ্চক্রমের সূত্র নির্ণয় করা সম্ভব।

উপপাদ্য ২

যদি $F(x)$ এবং $F'(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $F''(x)$ ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে কোসাইন রূপান্তর C অন্তরকরণ আকার $F''(x)$ কে বীজগাণিতিক আকার $f_c(n)$ এবং প্রান্তিক মান $F'(0)$ এবং $F'(\pi)$ এর মাধ্যমে রূপান্তর করে,

$$C\{F''(x)\} = -n^2 C\{F(x)\} - F'(0) + (-1)^n F'(\pi)$$

উপরিউক্ত (২) সূত্রে উপপাদ্য ২ এর যথার্থতা প্রমাণযোগ্য।

ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন প্রত্যেক ফাংশন $F(x)$ এর জন্য

$$C^{-1}\left\{\frac{f_c(n)}{n^2}\right\} = \int_0^x \int_t^x F(r)\,dr\,dt + \frac{f_c(0)}{2\pi}(x-\pi)^2 + A \qquad (৩)$$

যেখানে A যে কোনো ধ্রুবক, কারণ $n=0$ হলে $\frac{f_c(n)}{n^2}$ এর মান পাওয়া যাবে না।

সম্পর্ক (৩) কে যাচাই করার জন্য যদি $\frac{f_c(n)}{n^2} = y_c(n)$, $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ লেখা হয়, তবে

$$C\{Y''(x)\} = C\{-F(x)\} \text{ যদি } Y'(0) = Y'(\pi) = 0$$

হয়। যেহেতু $y_c(0)$ হলো যে কোনো মান, এ থেকে পাওয়া যায়

$$Y''(x) = -F(x) + B\,,\quad Y'(0) = Y'(\pi) = 0$$

যেখানে B একটি ধ্রুবক যা প্রান্তিক শর্ত থেকে নির্ণয় করা যাবে।

৪.১০ কনভোলুশন উপপাদ্য (Convolution theorem)

যদি $F_s(m)$ এবং $G_s(m)$ যথাক্রমে $f(x)$ এবং $g(x)$ এর ফুরিয়ার সাইন রূপান্তর হয়, তবে

$$\int_0^\infty F_s(m)\,G_s(m)\,dm = \int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx \qquad (১)$$

অনুরূপভাবে, যদি $F_c(m)$ এবং $G_c(m)$ যথাক্রমে $f(x)$ এবং $g(x)$ এর ফুরিয়ার কোসাইন রূপান্তর হয়, তবে

$$\int_0^\infty F_c(m)\,G_c(m)\,dm = \int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx \qquad (২)$$

বিশেষ ক্ষেত্রে যখন $f(x) = g(x)$ হয়, তখন (১) হতে পাওয়া যায়

$$\int_0^\infty \{F_s(m)\}^2\,dm = \int_0^\infty \{f(x)\}^2\,dx \qquad (৩)$$

এবং (২) হতে পাওয়া যায়

$$\int_0^\infty \{F_c(m)\}^2 \, dm = \int_0^\infty \{f(x)\}^2 \, dx \qquad (৪)$$

উপরিউক্ত (৩) এবং (৪) নং সম্পর্ক দুটিকে পার্সিভালের অভেদ বলে। ফুরিয়ার সাধারণ রূপান্তরের ক্ষেত্রেও অনুরূপ সম্পর্ক পাওয়া যায়। কাজেই যদি F(m) এবং G(m) যথাক্রমে f(x) এবং g(x) এর ফুরিয়ার সাধারণ রূপান্তর হয়, তবে এটি প্রমাণ করা যায় যে

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(m)\, \bar{G}(m)\, dm = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \bar{g}(x)\, dx \qquad (৫)$$

যেখানে 'বার' জটিল জোড় বুঝায় যা i কে $-i$ দ্বারা পরিবর্তন করলে পাওয়া যায়। যদি F(m) এবং G(m) যথাক্রমে f(x) এবং g(x) এর ফুরিয়ার রূপান্তর হয়, তবে হবে

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(m)\, G(m)\, e^{-imx} \, dm = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(x-u)\, du \qquad (৬)$$

যদি আমরা ফাংশন f(x) এবং g(x) এর কনভোলুশন f*g দ্বারা প্রকাশ করি তবে

$$f*g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(x-u)\, du \qquad (৭)$$

এক্ষেত্রে সম্পর্ক (৫)-কে নিম্নোক্তভাবে লেখা যায়

$$F\{f*g\} = F\{f\}\, F\{g\} \qquad (৮)$$

অর্থাৎ দুটি ফাংশনের কনভোলুশনের ফুরিয়ার রূপান্তর হলো ফাংশন দুটির ফুরিয়ার রূপান্তরের গুণফলের সমান। একে ফুরিয়ার রূপান্তরের কনভোলুশন উপপাদ্য বলে।

উদাহরণ ৩

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad \text{এবং } F(m) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\sin ma}{m}$$

হলে পার্সিভালের অভেদ ব্যবহার করে প্রমাণ কর

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sin ma/m^2)\, dm = \pi a$$

সমাধান : পার্সিভালের অভেদটি সমতুলভাবে লেখা যায়,

$$\int_{-a}^{a} \{f(x)\}^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(m)\}^2\, dm$$

অথবা $$\int_{-a}^{a} 1^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi}\, \frac{\sin^2 ma}{m^2}\, dm$$

অথবা $$\Big[x\Big]_{-a}^{a} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ma}{m^2}\, dm$$

অথবা $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ma}{m^2}\, dm = \pi a$$

উদাহরণ ৪

সমাধান কর : $V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = -h,$

$0 < x < \pi, \quad y > 0$

$V(0, y) = 0, \quad V(\pi, y) = 1, \quad V(x, 0) = 0$

$|V(x, y)| < M,$ যেখানে M ধ্রুবক।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ

$$V_{xx} + V_{yy} = -h \qquad (১)$$

অথবা $$\int_0^{\pi} V_{xx} \sin px\, dx + \int_0^{\pi} V_{yy} \sin px\, dx = -h\int_0^{\pi} \sin px\, dx$$

অথবা $$\int_0^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V \sin px\, dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^{\pi} V \sin px\, dx = h\left[\frac{\cos px}{p}\right]_0^{\pi}$$

অথবা $$\left[\sin px \frac{\partial V}{\partial x}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} p\cos px \frac{\partial V}{\partial x}\,dx$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^{\pi} V \sin px\,dx = \frac{\{(-1)^p - 1\}L}{p}$$

অথবা $$-p(\cos p\pi\, V(\pi, y) + p\, V(0,y) - p^2\int_0^{\pi} \sin px\; V(x, y)\,dx$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^{\pi} V(x, y)\sin px\,dx = -\frac{2}{p}, \quad (p \text{ বিজোড়})$$

অথবা $$-p(-1)^p - p^2\int_0^{\pi} V\sin px\,dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^{\pi} V\sin px\,dx = -\frac{2}{p}$$

অথবা $$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^{\pi} V\sin px\,dx - p^2\int_0^{\pi} V\sin px\,dx = -\frac{2}{p} - p \qquad (২)$$

ধরে করি

$$u(p, y) = \int_0^{\pi} V \sin px\,dx \qquad (৩)$$

কাজেই (২) হতে পাওয়া যায়

$$\frac{d^2u}{dy^2} - p^2u = -\frac{2+p^2}{p} \qquad (৪)$$

অথবা $$(D^2 - p^2)u = -\frac{2+p^2}{p}$$

অথবা $$u = -\frac{1}{D^2 - p^2}\left(\frac{2+p^2}{p}\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{D-p} - \frac{1}{D+p}\right]\left(\frac{2+p^2}{2p^2}\right)$$

$$= -\left[\frac{-1}{1-\frac{D}{p}} - \frac{1}{1+\frac{D}{p}}\right]\left(\frac{2+p^2}{2p^3}\right)$$

$$= \left[\left(1-\frac{D}{p}\right)^{-1} + \left(1+\frac{D}{p}\right)^{-1}\right]\left(\frac{2+p^2}{2p^3}\right)$$

$$= \left[1+\frac{D}{p} + \cdots + 1 - \frac{D}{p} + \cdots\cdots\right]\left(\frac{2+p^2}{2p^3}\right)$$

$$= \frac{2+p^2}{p^3}$$

আবার $\dfrac{d^2u}{dy^2} - p^2u = 0, \quad V(x,\ 0) = 0$ অথবা $u(p,\ 0) = 0$

এর সমাধান হলো

$$u(p,\ y) = Ae^{+py} + Be^{-py} \quad \cdots \quad \cdots$$

অথবা $\qquad u(p,\ 0) = A + B$

অথবা $\qquad A + B = 0$

এতে দেখা যায় যে, একটি ধ্রুবকের মান অন্য ধ্রুবকের মানের সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত। আমাদের সুবিধার জন্য মনে করি

$$A = 1, \quad B = -1$$

অতএব $\qquad u(p,\ y) = e^{py} - e^{-py}$

কাজেই সমীকরণ (৪) এর সমাধান হলো

$$u(p,\ y) = \frac{2+p^2}{p^3} + e^{py} - e^{-py} \qquad (৫)$$

অতএব সমস্যার সমাধান হলো

$$V(x,\ y) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} u(p,\ y) \sin px$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{2+p^2}{p^3} + e^{py} - e^{-py}\right) \sin px \qquad (৬)$$

প্রশ্নমালা

সমাধান কর :

১। $V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0$

$$V(0, y) = 0, \quad V(\pi, y) = 2, \quad V(x, 0) = 1$$

২। $V_{tt}(x, t) = a^2\, V_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$

$$V(x, 0) = V_t(x, 0) = V_x(0, t) = 0,$$

$$V_x(\pi, t) = -3$$

৩। $V_{yy}(x, y) = V_{xx}(x, y) + y, \quad 0 < x < l, \quad y > 0.$

$$V(x, 0) = l, \quad V_y(x, 0) = V_x(0, y) = 0$$

$$V_x(l, y) = e^{-y}$$

পঞ্চম অধ্যায়

লাপ্লাস রূপান্তর

৫.১ সমাকলন রূপান্তর

একটি ফাংশন $f(x)$ এর সমাকলন রূপান্তর $F(s)$ এর সংজ্ঞা হলো

$$F(s) = \int_a^b f(x)\, K(x, s)\, dx \qquad (১)$$

যেখানে $K(x, s)$ একটি জানা ফাংশন, যাকে এ রূপান্তরের কার্নেল বলে এবং a, b হলো নির্দিষ্ট নিম্নি বা সীমা। বিশেষ ক্ষেত্রে যখন $K(x, s) = e^{-sx}$, $a = 0$, $b = \infty$ হয় তখন আমরা $f(x)$ এর লাপ্লাস রূপান্তর $F(s)$ বা $L f(x)$ পেয়ে থাকি। এটি হলো লাপ্লাস রূপান্তরের সূত্র :

$$F(s) = L f(x) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \qquad (২)$$

এখানে (২) সূত্রে s বাস্তব বা জটিল সংখ্যা হতে পারে। কিন্তু একে এমনভাবে বাছাই করতে হবে যার ফলে সমাকলনটি কোথাও অভিসারী (convergent) হয়। পরিশেষে $R_e(s)$ কে যথেষ্ট বড় বিবেচনা করা হবে যেখানে R_e এর অর্থ হলো বাস্তব।

অনেক সময় যখন $F(s)$ বা $L f(x)$ জানা থাকে, অর্থাৎ কোনো ফাংশন $f(x)$ এর লাপ্লাস রূপান্তর জানা থাকে তখন আমরা (২) হতে $f(x)$ নির্ণয় করতে পারি। এখানে ফাংশন $f(x)$ কে $F(s)$ এর বিপরীত লাপ্লাস রূপান্তর বলা হয় যা নিচের সূত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয় :

$$f(x) = L^{-1} F(s) \qquad (৩)$$

লাপ্লাসের রূপান্তরের সুবিধা হচ্ছে, এর দ্বারা কোনো কঠিন ফাংশনকে একটি সহজ ফাংশনে পরিণত করা যায়। যেমন $f(x) = e^{-x}$ কে $F(s) = \dfrac{1}{s+1}$ ফাংশনে রূপান্তর করা যায় যা ফাংশন $f(x)$ থেকে অধিকতর সহজ প্রকৃতির। রূপান্তরিত ফাংশন $F(s)$ এর উপর প্রয়োজনীয় কাজ শেষে আবার সূত্র (৩) এর সাহায্যে মূল ফাংশন $f(x)$-এ ফেরত যাওয়া যায় যার ফলে সমস্যার মূল সমাধান পাওয়া

যায়। অর্থাৎ লাপ্লাসের রূপান্তরের কাজ হলো কঠিন সমস্যাকে সহজ করা এবং সহজ সমাধান থেকে আবার মূল সমাধানে ফিরে যাওয়া। এ পদ্ধতির সফলতা'র জন্য যা দরকার তা হলো দুই শ্রেণীর ফাংশনের মধ্যে একটি অদ্বিতীয় সম্পর্ক বলবৎ থাকা। উল্লেখ করা যায় যে, (২) সূত্রে প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর জন্য সর্বোচ্চ একটি ফাংশন $F(s)$ থাকতে হবে। অনুরূপভাবে প্রদত্ত ফাংশন $F(s)$ থেকে কেবল একটি ফাংশন $f(x)$ পাওয়া যাবে, সূত্র (৩) থেকে। ফাংশন $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হওয়াও আবশ্যকীয়। (২) বা (৩) সূত্রের ফাংশন $F(s)$ কে জেনারেটিং ফাংশন বা উৎস ফাংশন বলে এবং ফাংশন $f(x)$ কে নির্ণয়কারী (determining) ফাংশন বলে।

উদাহরণ ১

$f(x) = 1$ হলে $F(s)$ নির্ণয় কর :

উত্তর : $$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}.1.dx$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left[\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_0^M = -\frac{1}{s} \lim_{M\to\infty}\left(e^{-s.M} - e^0\right) = \frac{1}{s}$$

অথবা $$L\{1\} = \frac{1}{s}$$

২। ধ্রুবক a এর লাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় কর :

উত্তর : $$L f(x) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}.a.dx\ , \quad \{f(x) = a\}$$

$$= a\int_0^\infty e^{-sx}\,dx = a \lim_{M\to\infty}\left[\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_0^M$$

$$= -\frac{a}{s}\lim_{M\to\infty}\left(e^{-s.M} - e^0\right) = -\frac{a}{s}(0-1)$$

অথবা $$L\{a\} = \frac{a}{s}$$

৩। $f(x) = e^{ax}$ এর ল্যাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় কর :

উত্তর : $$Lf(x) = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}.\, e^{ax}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_0^M e^{-(s-a)x}\, dx$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)x}}{-(s-a)} \right]_0^M = \frac{0 - e^0}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}$$

অথবা $$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$$

বি: দ্র: যদি $a = 1$ হয় তবে আমরা পাই

$$L\{e^x\} = \frac{1}{s-1}$$

৪। দেখাও যে $L\{t e^{at}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$, $s > a$

উত্তর : $$Lf(t) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

অথবা $$L\{t e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}.t e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}.t.dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} = \int_0^M t\, e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left[\frac{\left[t\, e^{-(s-a)t} \right]_0^M}{-(s-a)} + \int_0^M \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} dt \right]$$

$$= 0 - \lim_{M \to \infty} \frac{\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^M}{-(s-a)^2} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

অথবা $$L\{t\,e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

৫। দেখাও যে $L\{t^2 e^{at}\} = \dfrac{2}{(s-a)^3}$, $s > a$

উত্তর ঃ $$L\,f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

অথবা $$L\{t^2 e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}.t^2 e^{at}\,dt = \lim_{M \to \infty} \int_0^M t^2 e^{-t(s-a)}\,dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left(\left[\frac{t^2 e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^M + \int_0^M \frac{2t\,e^{-(s-a)t}}{s-a}\,dt \right)$$

$$= \lim_{M \to \infty} \frac{2}{s-a} \int_0^M t\,e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left(\frac{2}{s-a} \left[\frac{t\,e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^M + \frac{2}{(s-a)^2} \int_0^M e^{-(s-a)t}\,dt \right)$$

$$= \lim_{M \to \infty} \frac{2}{(s-a)^2} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^M = \frac{2}{(s-a)^3}$$

৬। $L^{-1}\{(s^2-1)^{-1}\}$ নির্ণয় কর ঃ

উত্তর ঃ আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করে আমরা পাই

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s+1)\,(s-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}L\{e^{t}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-t}\}$$

$$= L\left\{\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\right\} = L\{\sinh t\}$$

অথবা $\frac{1}{s^2-1} = L\{\sinh t\}, \quad s > 1$

অথবা $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = \sinh t, \quad 0 < t < \infty$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ১ : প্রকৃতপক্ষে অসীম পর্যন্ত সমাকলন করার নিয়ম হলো নিম্নরূপ (একে অপ্রকৃত সমাকলন বলা হয়) :

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \underset{R\to\infty}{Lt}\int_0^R e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\underset{R\to\infty}{Lt}\left(1-e^{-sR}\right)$$

$$= \frac{1}{s}$$

পরবর্তীতে অসীম পর্যন্ত সমাকলন এ নিয়মে হয়েছে বলে ধরে নিতে হবে।

প্রশ্নমালা

নিম্নোক্ত ফাংশনগুলির ল্যাপ্লাসের রূপান্তর নির্ণয় কর :

১। $F(t) = 0, \ 0 < t < 1,$ উত্তর : $\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}$

$= 1, \ 1 < t < 2,$

$= 0, \ t > 2$

২। $F(t) = \sin t + 2\cos t$ উত্তর : $\frac{2s+1}{s^2+1}$

৩। $F(t) = \sin t \cos t$ উত্তর : $\frac{1}{s^2+4}$

৪। $F(t) = \sin t, \ 0 < t < \pi,$ উত্তর : $\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

$= 0, \quad t > \pi$

৫। $F(t) = \cos kt$ উত্তর : $\dfrac{s}{s^2+k^2}$

৬। $F(t) = \sin kt$ উত্তর : $\dfrac{k}{s^2+k^2}$

৭। $F(t) = \cosh kt$ উত্তর : $\dfrac{s}{s^2-k^2}$

৮। $F(t) = \sinh kt$ উত্তর : $\dfrac{k}{s^2-k^2}$

৯। $F(t) = t\,e^{kt}$ উত্তর : $\dfrac{1}{(s-k)^2}$

১০। $F(t) = e^{t}, \; 0 < t < 1$ উত্তর : $\dfrac{1-e^{1-s}}{s-1}$

$\quad = 0, \; t > 1$

৩.২ জাতকের রূপান্তর

মনে করি লাপ্লাস রূপান্তর হলো

$$y(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, x(t)\, dt \tag{৪}$$

অথবা $$y(s) = L\,x(t) \tag{৫}$$

এখন আমরা $L\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$ নির্ণয় করব $y(s)$ এর মাধ্যমে। কাজেই

$$L\left(\frac{dx}{dt}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

আংশিক সমাকলন পদ্ধতিতে আমরা পাই

$$L\left(\frac{dx}{dt}\right) = \Big[\, e^{-st}\, x(t) \Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, x(t)\, dt$$

$$= 0 - x_0 + sy(s) \tag{৬}$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

যখন $t = 0$ তে $x(t)$ এর মান হলো x_0, অর্থাৎ $x(0) = x_0$।

এখন $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ এর লাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় করার জন্য মনে করি

$$u = \frac{dx}{dt} \quad \text{এবং} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}$$

সেক্ষেত্রে আমরা পাই

$$L\left(\frac{du}{dt}\right) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{du}{dt} \, dt$$

$$= \left[e^{-st} u \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} u \, dt$$

(আংশিক সমাকলনকরণের মাধ্যমে এবং বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

$$= -u_0 + s \int_0^\infty e^{-st} u \, dt = -u_0 + s\, L\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

যেখানে $t = 0$ তে $u = \dfrac{dx}{dt}$ এর মান হলো u_0 ।

$$= -u_0 + s(-x_0 + sy) \text{ , (৬) অনুসারে}$$

$$= -u_0 - s x_0 + s^2 y \qquad (৭)$$

অনুরূপভাবে $\dfrac{d^3x}{dt^3}$ এর লাপ্লাসের রূপান্তর নির্ণয়ের জন্য আমরা $\dfrac{d^2x}{dt^2} = v$ ধরে নিব এবং উপরিউক্ত নিয়ম অনুসরণ করে তা নির্ণয় করা যাবে। এভাবে যে কোনো ক্রমের অন্তরকের লাপ্লাসের রূপান্তর নির্ণয় করা যাবে। যোগাশ্রয়ী অন্তরকরণ সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে লাপ্লাস রূপান্তর একটি কার্যকর পন্থা।

উদাহরণ ৭

সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + w^2 y = \cos wt \quad , \quad \text{যদি} \;\; y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0 \text{ হয়}$$

সমাধান : মনে করি

$$x = L\, y(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, y(t)\, dt \qquad (৮)$$

এখন $$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{dy}{dt}\,dt$$

$$= \Big[e^{-st}\,y(t) \Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,y(t)\,dt$$

$$= -y(0) + sx = sx \qquad (৯)$$

(বি: প্র: ১ অনুসারে)

$$L\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = L\left(\frac{du}{dt}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{du}{dt}\,dt,\quad \text{যেখানে } u = \frac{dy}{dt}$$

$$= \Big[e^{-st}u \Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,u\,dt$$

$$= -u(0) + s\,L\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= s(sx) = s^2x \qquad (১০)$$

(বি: প্র: ১ অনুসারে)

$$L(\cos wt) = \int_0^\infty e^{-st}\cos wt\,dt$$

$$= \left[e^{-st}\,\frac{\sin wt}{w} \right]_0^\infty + \frac{s}{w}\int_0^\infty e^{-st}\sin wt\,dt$$

$$= 0 + \frac{s}{w}\int_0^\infty e^{-st}\sin wt\,dt$$

$$= \frac{s}{w}\left\{ \left[-e^{-st}\,\frac{\cos wt}{w} \right]_0^\infty - \frac{s}{w}\int_0^\infty e^{-st}\cos wt\,dt \right\}$$

$$= \frac{s}{w^2} - \frac{s^2}{w^2} L(\cos wt)$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

অথবা $$\left(1 + \frac{s^2}{w^2}\right) L(\cos wt) = \frac{s}{w^2}$$

অথবা $$L(\cos wt) = \frac{s}{s^2 + w^2} \qquad (১১)$$

কাজেই প্রদত্ত অন্তরকরণ সমীকরণ দাঁড়ায়

$$L\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + w^2 L(y) = L(\cos wt)$$

অথবা $$s^2x + w^2x = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

অথবা $$(s^2 + w^2)k = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

অথবা $$x = \frac{s}{(s^2 + w^2)^2} \qquad (১২)$$

এখন (১১) কে, s এবং t ধ্রুবক মনে করে, w এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$L(-t \sin wt) = -\frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2}$$

অথবা $$L\left(\frac{t}{2w} \sin wt\right) = \frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$$

অথবা $$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}\right) = \frac{t}{2w} \sin wt$$

অথবা $$L^{-1}(x) = \frac{t}{2w} \sin wt, \qquad (১২ হতে)$$

অথবা $$y(t) = \frac{t}{2w} \sin wt, \qquad (৮ হতে)$$

উদাহরণ ৮

কোনো $f(t)$ এর পিরিয়ড হলো w যার ফলে $f(t + w) = f(t)$, তাহলে দেখাও যে

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{1-\exp(-sw)} \int_0^w e^{-st} f(t)dt$$

সমাধান ঃ আমরা জানি যে $f(t)$ এর লাপ্লাস রূপান্তর হলো

$$L\, f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\int_0^w e^{-st} f(t)dt + \int_w^{2w} e^{-st} f(t)dt + \int_{2w}^{3w} e^{-st} f(t)dt + \cdots$$

$$= \int_0^w e^{-su} f(u)du + \int_0^w e^{-s(u+w)} f(u+w)du$$

$$+ \int_0^w e^{-s(u+2w)} f(u+2w)du + \cdots\cdots \text{(অসীম পর্যন্ত)}$$

যেহেতু ফাংশন $f(t)$ পিরিয়ডিক, কাজেই $f(u) = f(u+w) = f(u+2w) = \cdots$
অতএব আমরা পাই

$$L\, f(t) = \int_0^w e^{-su} f(u)du + \int_0^w e^{-s(u+w)} f(u)du$$

$$+ \int_0^w e^{-s(u+2w)} f(u)du + \cdots\cdots$$

$$= (1 + e^{-sw} + e^{-2sw} + \cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত}) \int_0^w e^{-su} f(u)du$$

$$= \left(1 + e^{-sw}\right)^{1} \int_0^w e^{-su} f(u)du$$

$$= \frac{\int_0^w e^{-su} f(u)du}{1-\exp(-sw)}$$

উপপাদ্য ১

যদি a ধ্রুবক হয় তবে $L\{af(x)\} = aLf(x)$

প্রমাণ ঃ ল্যাপ্লাসের রূপান্তরের সূত্র অনুসারে,

$$L\{af(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx}\{af(x)\}\,dx$$

$$= a\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$= aLf(x)$$

অথবা $L\{af(x)\} = aLf(x)$

উপপাদ্য ২

ল্যাপ্লাস রূপান্তর হলো যোগাশ্রয়ী সংঘটক,

অর্থাৎ $f(s) = L\phi(t)$, $g(s) = L\psi(t)$ হলে

$$L\{a\phi(t)\} + L\psi(t)\} = aL\phi(t) + b\psi(t)$$

যেখানে a, b ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ $L\{a\phi(t) + L\{b\psi(t)$

$$= \int_0^\infty e^{-st} a\phi(t)dt + \int_0^\infty e^{-st} b\psi(t)dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}\psi(t)dt,$$ (উপপাদ্য ১ অনুসারে)

$$= a\,L\phi(t) + bL\psi(t)$$

অতএব উপপাদ্য ১ এবং উপপাদ্য ২ হতে প্রমাণিত হয় যে লাপ্লাসের রূপান্তর যোগাশ্রয়ী সংঘটক।

বিপরীতক্রমেও দেখা যায় এখানেও যোগাশ্রয়ী ধর্ম বলবৎ আছে। কারণ

$$L^{-1}\{af(s)\}+L^{-1}\{bg(s)\}$$

$$=aL^{-1}f(s)+bL^{-1}g(s)$$

$$=a\phi(t)+b\psi(t)$$

উপপাদ্য ৩

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt=L\phi(t) \text{ হলে,}$$

$$f'(s)=-L\{t\phi(t)\}$$

প্রমাণ : দেয়া আছে

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt$$

এখন s এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$f'(s)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{-st}\phi(t)\right\}dt$$

$$=-\int_0^\infty e^{-st}\,t\phi(t)\,dt=-L\{t\phi(t)\}$$

অথবা $\quad f'(s)=-L\{t\phi(t)\}$

উপপাদ্য 8

$f(s)=L\phi(t),\ \lim\limits_{t\to\infty} e^{-st}\phi(t)=0$ হলে $L\phi'(t)=-\phi(0)+sf(s)$

যা আংশিক সমাকলন দ্বারা প্রমাণিত।

৫.৩ চলকের যোগাত্মক পরিবর্তন

লাপ্লাস রূপান্তরের সূত্র অনুসারে

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \phi(t)dt$$

যদি $a > 0$ একটি ধ্রুবক হয় তবে $t = au$ ধরে পাওয়া পাওয়া যায়

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sau} \phi(au).adu$$

$$= a\int_0^\infty e^{-sau} \phi(au)\ du$$

এখন $s = s/a$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$f\left(\frac{s}{a}\right) = a\int_0^\infty e^{-su} \phi(au)du$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st} \phi(at)dt = aL\phi(at)$$

অথবা $$f\left(\frac{s}{a}\right) = aL\{\phi(at)\}$$

অথবা $$L\{\phi(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (i)$$

যদি $\phi(t) = 0,\ -\infty < t < 0$ এবং $b > 0$ হয় তবে

$$\int_0^\infty e^{-st} \phi(t-b)dt = e^{-bs} \int_{-b}^\infty e^{-su} \phi(u)du$$

$$= e^{-bs}\int_0^{\infty} e^{-st}\,\phi(t)dt$$

অথবা $$L\{\phi(t-b)\} = e^{-bs}\,L\,\phi(t) = e^{-bs}\,f(s) \qquad (ii)$$

এখানে $$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\phi(t)dt$$

অথবা $$f(as) = \int_0^{\infty} e^{-ast}\,\phi(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\,\phi\left(\frac{t}{a}\right)\frac{dt}{a}, \quad \left(t = \frac{t}{a} \text{ বসিয়ে}\right)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{1}{a}\,\phi\left(\frac{t}{a}\right)dt, \; a > 0$$

অথবা $$f(as) = L\left\{\frac{1}{a}\phi\left(\frac{t}{a}\right)\right\}, \; a > 0 \qquad (iii)$$

উদাহরণ ৯

$$\phi(t) = \sin t, \; f(s) = \frac{1}{s^2+1} \text{ হলে}$$

$$L\{\phi(at)\} = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right) \text{ সূত্রটি যাচাই কর।}$$

প্রমাণ ঃ আমরা লাপ্লাস রূপান্তর ব্যবহার করে পাই

$$L\{\phi(at)\} = L(\sin at) = \int_0^{\infty} e^{-st}\sin at\,dt = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\,f\left(\frac{s}{a}\right), \quad a \neq 0$$

উদাহরণ ১০

$$L(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$$ হতে $L(\cos t)$ নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে করি $\phi(t) = \sin t$, তাহলে উপপাদ্য ৪ অনুসারে

$$\underset{t\to\infty}{Lt}\, e^{-st}\phi(t) = \underset{t\to\infty}{Lt}\, e^{-st}\sin t = 0$$

কাজেই $\quad L\phi'(t) = -\phi(0) + s\,f(s)$

অথবা $\quad L\phi'(t) = L(\cos t) = -0 + s\,L(\sin t)$

অথবা $\quad L(\cos t) = \dfrac{s}{s^2+1}$

উদাহরণ ১১

একক ফাংশনের ল্যাপ্লাস রূপান্তর : $\quad h(t) = \begin{pmatrix} 1, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{pmatrix}$

উত্তর : $$Lh(t) = \int_0^\infty e^{-st}h(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^\infty$$

অথবা $\quad Lh(t) = \dfrac{1}{s}$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

সাধারণ ল্যাপ্লাস রূপান্তরের তালিকা

$f(x)$	$f(s) = Lf(x)$	$f(x)$	$f(s) = Lf(x)$
1	$\dfrac{1}{s},\ s > 0$	$E_i(t)$	$\dfrac{\log(s+1)}{s}$
a	$\dfrac{a}{s},\ s > 0$	$S_i(t)$	$\dfrac{1}{s}\tan^{-1}s$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a},\ s > a$	$C_i(t)$	$\dfrac{1}{2s}\log(s^2+1)$
$\cos ax$	$\dfrac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$	$J_0(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$
$\sin ax$	$\dfrac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$	$J_0(2\sqrt{t})$	$\dfrac{e^{-1/s}}{s}$

x^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}},\ s>0$	x	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-bx}\cos ax$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\pi/s}$
$e^{-bx}\sin ax$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$\sin at - at\cot at$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{\sin at}{t}$	$\tan^{-1}\frac{a}{s}$
$e^{ct}\sinh at$	$\frac{a}{(s-c)^2-a^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
$e^{ct}\cosh at$	$\frac{s-c}{(s-c)^2-a^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^3}}$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$	$\mathrm{erf}(a/2\sqrt{t})$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\log\left\lvert\frac{s-a}{s-b}\right\rvert$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^{3/2}}$	$2\sqrt{t}\ \mathrm{i\,erf}(a/2\sqrt{t})$
$\frac{\sin t}{t}$	$\tan^{-1}\frac{1}{s}$	$\frac{1}{a}\sin at-\frac{1}{b}\sin bt$	$\frac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\mathrm{erf}\sqrt{t}$	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$	$\cos at-\cos bt$	$\frac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$

৫.৪ লব্ধি

দুটি নির্ধারকারী ফাংশন $\phi(t)$ এবং $\psi(t)$ এর লব্ধি হলো

$$w(t)=\int_0^t \phi(u)\,\psi(t-u)\,du=\phi*\psi\,,\ 0<t<\infty$$

এখানে উল্লেখ্য যে, যদি $t - u = y$ বসানো হয় তবে

$$\int_0^t \phi(u)\,\psi(t-u)\,du = \int_0^t \phi(t-y)\,\psi(y)\,dy$$

$$= \int_0^t \phi(t-u)\,\psi(u)\,du$$

অর্থাৎ $\phi * \psi = \psi * \phi$

উদাহরণ ১২

$t * \sin t$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ আমরা জানি

$$\phi * \psi = w(t) = \int_0^t \phi(u)\,\psi(t-u)\,du$$

অথবা $$t * \sin t = \int_0^t u \sin(t-u)\,du$$

$$= \Big[u\cos(t-u)\Big]_0^t - \Big[\sin(t-u)\Big]_0^t$$

$$= t - \sin t,\ 0 < t < \infty$$

উদাহরণ ১৩

$t^{-Y_2} * t^{-Y_2}$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ

$$\phi * \psi = \int_0^t \phi(u)\,\psi(t-u)\,du$$

অথবা $$t^{-Y_2} * t^{-Y_2} = \int_0^t u^{-Y_2}(t-u)^{-Y_2}\,du$$

$$= \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du = B\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \pi$$

এটি হতে প্রমাণ হয় যে, দুটি চলক ফাংশনের লব্ধি ধ্রুবক হতে পারে।

উপপাদ্য ৫

কনভোলুশন (ফল্টুং) উপপাদ্য :

যদি
$$F(s) = Lf(x) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$G(s) = L\,g(x) = \int_0^\infty e^{-sx} g(x)\,dx$$

হয় তবে

$$F(s)\,G(s) = L\int_0^x f(u)\,g(x-u)\,du$$

$$= L\int_0^x f(x-u)\,g(u)\,du$$

প্রমাণ ঃ আমরা উপরিউক্ত উৎস (জেনারেটিং) ফাংশন দুটিকে সরাসরি গুণ করে পাই

$$F(s)\,G(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx \int_0^\infty e^{-sy} g(y)\,dy$$

$$= \iint e^{-s(x+y)} f(x)\,g(y)\,dx\,dy$$

এখানে দ্বৈত সমাকলন xy তলের প্রথম চতুর্থাংশের উপর নির্ণয় করা হবে যেখানে

$$x > 0,\ y > 0$$

মনে করি $\quad t = x + y,\ \ u = y$

অথবা $\quad x = t - u,\ \ y = u$

তাহলে আমরা পাই

$$\iint e^{-s(x+y)} f(x)\, g(y)\, dx\, dy$$

$$= \iint e^{-st} f(t-u)\, g(u)\, J . dt\, du$$

যেখানে J হলো জ্যাকোবিয়ান (Jacabian) :

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

যদি আমরা u কে এভাবে বিবেচনা করি যে $0 \leqslant u \leqslant t$ এবং $0 \leqslant t \leqslant \infty$, তাহলে সমাকলনের সমস্ত এলাকা $x > 0$, $y > 0$ ভরে যাবে। এক্ষেত্রে উপরোক্ত দ্বৈত সমাকলন দাঁড়ায়

$$\int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} e^{-st} f(t-u)\, g(u)\, dt\, du$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dx \int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-sx} \left\{ \int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du \right\} dx$$

$$= L \int_0^x f(x-u)\, g(u)\, du$$

অনুরূপভাবে যদি আমরা মনে করি যে, $x + y = t$, $y = t - u$ এবং $x = u$ তাহলে এক্ষেত্রে $J = \frac{\partial(y,x)}{\partial(t,u)} = 1$ হয়। ফলে দ্বৈত সমাকলনটি দাঁড়ায়

$$L\int_0^x f(u)\ g(x-u)\ du$$

অতএব পরিশেষে আমরা পাই

$$F(s)\ G(s) = L\int_0^x f(x-u)\ g(u)\ du = L\int_0^x \quad u)\ g(x-u)\ du$$

যার ফলে উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

উপপাদ্য ৬

প্রথম শিফটিং (shifting) উপপাদ্য :

মনে করি $\quad L f(x) = F(t)$

তাহলে $\quad L\{f(x)\ e^{ks}\} = F(t-k)\ , \quad t > k\ , \quad k > 0$

প্রমাণ : আমরা জানি

$$L f(x) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\ dx = F(t) \qquad (১)$$

অতএব

$$L\{f(x)\ e^{ks}\} = \int_0^\infty e^{-sx}.\ e^{ks}.f(x)\ dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(x-k)} f(x)\ dx \qquad (২)$$

$$= F(t-k)\ , \quad \{\ (১)\ \text{অনুসারে}\ \}$$

উপপাদ্য ৭

দ্বিতীয় শিফটিং উপপাদ্য :

মনে করি $\quad L f(x) = F(t)$

তাহলে $\quad L\{f(x)\ e^{-sk}\} = F(t+k)\ , \quad k > 0$

প্রমাণ : লাপ্লাসের রূপান্তরের সূত্র থেকে আমরা জানি

$$L f(x) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\ dx = F(t) \qquad (১)$$

অতএব $$L\{f(x)\, e^{-sk}\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}.\, e^{-sk} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s(x+k)} f(x)\, dx$$

$$= F(t+k) \qquad (২)$$

{ (১) অনুসারে }

৫.৫ নিম্নোক্ত আকারের সমাকলন

(ক) মনে করি নিম্নোক্ত আকারের সমাকলন

$$\int_0^{\infty} f(s)\, \psi(s)\, ds \qquad (১)$$

নির্ণয়ের জন্য দেয়া আছে, যেখানে $f(s)$ হলো উৎস ফাংশন এবং $\psi(s)$ হলো নির্ণয়কারী ফাংশন,

$$f(s) = L\phi(t),\ g(s) = L\psi(t)$$

তাহলে সমাকলনের ক্রম যদি পরিবর্তনযোগ্য হয় তবে আমরা পাই

$$\int_0^{\infty} f(s)\psi(s)\, ds = \int_0^{\infty} \psi(s)\, ds \int_0^{\infty} e^{-st}\, \phi(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \phi(t) dt \int_0^{\infty} e^{-st}\, \psi(s) ds$$

অথবা $$\int_0^{\infty} \psi(s)\, L\phi(t)\, ds = \int_0^{\infty} \phi(s)\, L\psi(t) ds \qquad (২)$$

অনেক ক্ষেত্রে (১) সমাকলনের মান নির্ণয়ের চেয়ে (২) এর ডানপক্ষের সমাকলনের মান নির্ণয় অনেক সহজ।

(গ) মনে করি নিম্নোক্ত আকারের সমাকলন

$$\psi(t) = \int_0^\infty \phi(xt)\, h(x)\, dx \qquad (৩)$$

এর মান নির্ণয় করতে হবে যেখানে $h(x)$ হলো যে কোনো ফাংশন এবং $f(s) = L\phi(t)$ । ধরা যাক যে সমাকলন চিহ্নের মধ্যে আমরা সমাকলন করতে পারি , তাহলে

$$g(s) = L\psi(t) = \int_0^\infty h(x)\, dx \int_0^\infty e^{-st}\, \phi(xt)dt$$

অথবা
$$g(s) = \int_0^\infty \frac{h(x)}{x}\, f\left(\frac{s}{x}\right) dx \qquad (৪)$$

সমাকলন (৩) এর চেয়ে কোনো কোনো ক্ষেত্রে সমাকলন (৪) নির্ণয় করা অনেক সহজ । যখন সমাকলন (৪) নির্ণয় করা হলো তখন আমরা পাই

$$\psi(t) = L^{-1}\, g(s) \qquad (৫)$$

উদাহরণ ১৩

মনে করি $\phi(t) = t, \quad \psi(t) = t \sin t$

তাহলে সূত্র (২) হতে

$$\int_0^\infty \phi(s) L\psi(t) ds = \int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\, ds = -\int_0^\infty s \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) ds$$

$$= -\left[\frac{s}{s^2+1}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে সমাকলনের ক্রম পরিবর্তনের বিস্তারিত কাজ বর্জন করা হয়েছে)

উদাহরণ ১৪

মান নির্ণয় কর : $\psi(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t+1}\, dt$

উত্তর : (৩) এ মনে করি

$$\phi(x) = e^{-x}, \quad h(x) = \frac{1}{x+1}, \; f(s) = \frac{1}{s+1}$$

অতএব (৪) হতে আমরা পাই

$$g(s) = L\psi(x) = \int_0^\infty \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+s}\, dx = \frac{\log s}{s-1}$$

অথবা
$$g(s+1) = \frac{\log(s+1)}{s} = L\, E_i(t)$$

অথবা
$$\psi(t) = L^{-1} g(s) = e^t E_i(t)$$

উপপাদ্য ৮

ফুরিয়ার মেলিন উপপাদ্য : x এর ঋণাত্মক মানের জন্য যদি ফাংশন $f(x)$ এর মান শূন্য হয় তাহলে

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\alpha}^{c+i\alpha} e^{sx} F(s) ds$$

যেখানে $i = \sqrt{-1}$ এবং c হলো ধনাত্মক ধ্রুবক। এক্ষেত্রে $f(x)$ কে $F(s)$ এর বিপরীত ল্যাপ্লাস রূপান্তর বলে।

এখানে ফাংশন $F(s)$ হলো $f(x)$ এর সরাসরি ল্যাপ্লাস রূপান্তর

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

উপরোক্ত উপপাদ্যটির উৎপত্তির জন্য আমরা নিম্নোক্তভাবে অগ্রসর হতে পারি। যদি ফাংশন f(t) এর নির্দিষ্ট সংখ্যক অধিমান (maximum value) এবং নির্দিষ্ট সংখ্যক অধিমান এবং সাধারণ বিচ্ছিন্নতা থাকে তবে একে নিচের সমাকলন দ্বারা প্রকাশ করা যায় :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{2\pi is(t-u)}\, du \qquad (১)$$

মনে করি উক্ত সমাকলনের জন্য

$$2\pi s = v \qquad (২)$$

তাহলে (১) থেকে পাওয়া যায়

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{iv(t-u)}\, du \qquad (৩)$$

এখন (১) এর সমাকলন সমভাবে অভিসারী হওয়ার জন্য নিচের সমাকলন বর্তমান থাকা আবশ্যক :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \qquad (৪)$$

আমরা মনে করি যে, ফাংশন $f(t)$ এর নিম্নোক্ত ধর্ম আছে :

$$f(t) = 0 \quad \text{যখন } t < 0 \qquad (৫)$$

এক্ষেত্রে ফাংশন $f(t)$ এর ফুরিয়ার সমাকলনে প্রকাশ হবে :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt} dv \int_{0}^{\infty} f(u)\, e^{-ivu}\, du \qquad (৬)$$

যেখানে (৫) অনুসারে দ্বিতীয় সমাকলনের নিচের সীমা শূন্য হয়েছে।

আমরা ফাংশন $\phi(t)$ নিম্নভাবে বিবেচনা করি :

$$\phi(t) = e^{-ct} f(t) \qquad (৭)$$

যেখানে c হলো ধনাত্মক ধ্রুবক। একে (৬)-এ বসিয়ে দিলে আমরা পাই

$$\phi(t) = e^{-ct} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt} dv \int_{0}^{\infty} f(u)\, e^{-uc}\, e^{-ivu}\, du \qquad (৮)$$

এখন মনে করি

$$p = c + iv \qquad (৯)$$

তাহলে (৮) কে নিম্ন আকারে লেখা যায় :

$$e^{-ct} f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(p-c)t}\, dp \int_{0}^{\infty} f(u)\, e^{-pu}\, du \qquad (১০)$$

এখন (১০) এর উভয় দিকে e^{-ct} দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\,dp\int_{0}^{\infty} f(u)\,e^{-pu}\,du \qquad (১১)$$

ফুরিয়ার সমাকলন (৩) থেকে সমাকলন (১১) অধিকতর সাধারণ। কারণ যদি

$$I=\int_{0}^{\infty} |\,f(t)\,|\,dt \qquad (১২)$$

সমাকলনটি অস্তিত্বহীন হয়, কিন্তু

$$I'=\int_{0}^{\infty} e^{-c_0 t}\,|\,f(t)\,|\,dt \qquad (১৩)$$

$c_0>0$ এর জন্য বর্তমান থাকে, তাহলে (১১) $c>c_0$ এর জন্য সঙ্গত হবে।

যদি আমরা মনে করি

$$g(p)=\int_{0}^{\infty} f(u)\,e^{-pu}\,du \qquad (১৪)$$

তাহলে (১১) থেকে আমরা পাই

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\,g(p)\,dp \qquad (১৫)$$

আবার আমরা (১৪) থেকে লিখতে পারি

$$g(p)=\int_{0}^{\infty} e^{-pt}\,f(t)\,dt \qquad (১৬)$$

সমীকরণ (১৫) এবং (১৬) কে ফুরিয়ার-মেলিন সমীকরণ বলে।

মনে করি $f(t)$ হলো কোনো বাস্তব চলক t এর ফাংশন যার কেবল নির্দিষ্ট সংখ্যক উর্ধ্ববিন্দু এবং অধিবিমান এবং বিচ্ছিন্ন বিন্দু আছে। তাছাড়া t এর ঋণাত্মক মানের জন্য $f(t)$ এর মান শূন্য যদি লাপ্লাস রূপান্তর

$$L\, f(t) = g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \qquad (১৭)$$

হয়, যেখানে $R_e\, p > c > 0$, তাহলে

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} g(p)\, dp \qquad (১৮)$$

যেখানে সমাকলন

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} f(t)\, dt \qquad (১৯)$$

পরম অভিসারী।

আমরা (১৭) থেকে বলতে পারি যে, ফাংশন $f(t)$ এর লাপ্লাস রূপান্তর হলো

$$g(p) = L\, f(t) \qquad (২০)$$

তাহলে (১৮) থেকে বলা যাবে

$$f(t) = L^{-1} g(p) \qquad (২১)$$

অর্থাৎ $f(t)$ হলো $g(p)$ এর বিপরীত লাপ্লাস রূপান্তর।

উদাহরণ ১৫

সমাধান কর : $y'(t) + a\, y(t) = \phi(t),\ y(0) = A$

যেখানে a এবং A যে কোনো ধ্রুবক।

উত্তর : মনে করি

$$x(s) = L\, y(t) \text{ এবং } f(s) = L\phi(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} y(t)\, dt,$$

এখন $$L\, y'(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} y'(t)\, dt$$

$$= \left[e^{-st} y(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} y(t)\, dt$$

$$= -y(0) + s\, L\, y(t)$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

$$= -A + s\,x(s)$$

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$-A + s\,x(s) + a x(s) = f(s)$$

অথবা $$(s+a)\ x(s) = A + f(s)$$

অথবা $$x(s) = \frac{A + f(s)}{s+a}$$

অথবা $$x(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{f(s)}{s+a}$$

অথবা $$L\,y(t) = \frac{A}{s+a} + \frac{f(s)}{s+a}$$

অথবা $$y(t) = AL^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) + L^{-1}\left(\frac{f(s)}{s+a}\right)$$

অথবা $$y(t) = Ae^{-at} + B(t)\ ,\ \ B(t) = L^{-1}\ \frac{f(s)}{s+a}$$

এখানে $f(s)$ এর মান জানা থাকলে $B(t)$ এর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে।

উদাহরণ ১৬

সমাধান কর : $$y'(t) + y(t) = 1$$
$$y(0) = 2$$

সমাধান ঃ মনে করি

$$x(s) = L\,y(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,y(t)\ dt$$

এখন $$L\,y'(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,y'(t)\ dt$$

$$= \Big[\,e^{-st}\,y(t)\,\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,y(t)\ dt$$

$$= -y(0) + s\,L\,y(t)$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

$$= -2 + sx(x)$$

$$L(1) = \int_0^\infty e^{-st}.1.dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$-2 + s\,x(s) + x(s) = \frac{1}{s}$$

অথবা $\qquad x(s)\,(1+s) = \frac{1}{s} + 2$

অথবা $\qquad x(s) = \frac{1}{s(1+s)} + \frac{2}{1+s}$

অথবা $\qquad x(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$

অথবা $\qquad L\,y(t) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$

অথবা $\qquad y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$

অথবা $\qquad y(t) = 1 + e^{-t}$

উদাহরণ ২৭

সমাধান কর : $\qquad y''(t) + y(t) = 2e^t$

$$y(0) = y'(0) = 2$$

সমাধান : মনে করি

$$x(s) = Ly(t) = \int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt$$

কাজেই $\qquad Ly'(t) = \int_0^\infty e^{-st}y'(t)\,dt$

$$= \left[e^{-st}\, y(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, y(t)\, dt$$

$$= -y(0) + sx(s)$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

$$= -2 + sx(s)$$

$$Ly''(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, y''(t)\, dt$$

$$= \left[e^{-st}\, y'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, y'(t)\, dt$$

$$= -y'(0) + s\{-2 + sx(s)\}$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

$$= -2 - 2s + s^2 x(s)$$

$$L(e^t) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^t\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-1)t}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-1}$$

এর প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$-2 - 2s + s^2 x(s) + x(s) = \frac{2}{s-1}$$

অথবা $$(s^2+1)\, x(s) = \frac{2}{s-1} + 2 + 2s = \frac{2s^2}{s-1}$$

অথবা $$x(s) = \frac{2s^2}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{s+1}{s^2+1}$$

অথবা $$Ly(t) = \frac{1}{s-1} + \frac{s+1}{s^2+1}$$

অথবা $$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+1}\right)$$

অথবা $$y(t) = e^t + \cos t + \sin t$$

উদাহরণ ১৮

সমাধান কর : $$y''(t) + y'(t) = 0$$

সমাধান : মনে করি

$$x(s) = Ly(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, y(t)\, dt$$

কাজেই

$$L\, y'(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, y'(t) dt = \Big[e^{-st}\, y(t)\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, y(t) dt$$

$$= -y(0) + sx(s) = -A + sx(s)$$

(বি: দ্র: ১ অনুসারে)

$$L\, y''(t) = \int_0^\infty e^{-st}\, y''(t)\, dt$$

$$= -y'(0) + s\{-y(0) + sx(s)\}$$

$$= -y'(0) - y(0)s + s^2x(s)$$

$$= -B - As + s^2x(s)$$

অতএব প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$-B - As + s^2x(s) - A + sx(s) = 0$$

অথবা $$(s^2 + s)\, x(s) = +B + A + As$$

অথবা $$x(s) = +\frac{(A+B)}{s^2+s} + A \cdot \frac{s}{s^2+s}$$

অথবা $$L\, y(t) = +\frac{A+B}{s} - \frac{B}{s+1}$$

অথবা $y(t) = (A+B)L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - BL^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$

অথবা $y(t) = C + De^{-t}, \ (A+B=C, \ -B=D)$

উদাহরণ ১৯

সমাধান কর : $$\frac{dX}{dt} + 2X = e^{-2t}$$

যেখানে প্রারম্ভিক শর্ত হলো $X(0) = 1$

সমাধান ঃ মনে করি

$$x = L\,X(t) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,X(t)dt$$

এখন $$L\left(\frac{dX}{dt}\right) = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{dX}{dt}dt$$

$$= \left[e^{-st}\,X(t)\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-st}\,X(t)\,dt$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

$$= 0 - X(0) + s.x = sx - 1$$

$$L\left(e^{-2t}\right)\int_0^{\infty} e^{-st}\,.\,e^{-2t}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+2)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{s+2}$$ (বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$sx - 1 + 2x = \frac{1}{s+2}$$

অথবা $$(s+2)x = 1 + \frac{1}{s+2}$$

অথবা $$x = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

অথবা $$LX(t) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

অথবা $$X(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) + L^{-1}\frac{1}{(s+2)^2}$$

অথবা $$X(t) = e^{-2t} + t\,e^{-2t}$$

অথবা $$X(t) = (t+1)\,e^{-2t}$$

উদাহরণ ২০

সমাধান কর : $$X''(t) - 4X'(t) + 4X(t) = 0$$

যেখানে সীমা শর্ত হলো $X(0) = 0,\ X'(0) = 1$

সমাধান : মনে করি

$$x = LX(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,X(t)\,dt$$

তাহলে $$LX'(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,X'(t)\,dt$$

$$= \Big[e^{-st}\,X(t)\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,X(t)\,dt$$

$$= 0 - X(0) + sx = sx$$

$$LX''(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,X''(t)\,dt$$

$$= \Big[e^{-st}\,X'(t)\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,X'(t)\,dt$$

$$= 0 - X'(0) + sLX'(t)$$

$$= -1 + s(sx) = s^2x - 1$$ (বি: দ্র: ১ অনুসারে)

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$(s^2 - 4s + 4)x = 1$$

অথবা $$x = \frac{1}{(s-2)^2}$$

অথবা $$LX(t) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

অথবা $$X(t) = L^{-1} \frac{1}{(s-2)^2}$$

অথবা $$X(t) = te^{2t} \quad \text{(উদাহরণ ৪ দ্রষ্টব্য)}$$

উদাহরণ ২৯

সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

যেখানে $$y = 1\ ,\quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{যখন} \quad x = 0$$

সমাধান : মনে করি

$$z = L\ y(x) = \int_0^\infty e^{-sx}\ y(x)\ dx$$

তাহলে $$L\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int_0^\infty e^{-sx}\ \frac{dy}{dx}\,dx$$

$$= \Big[e^{-sx}\ y(x) \Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}\ y(x)\ dx$$

$$= 0 - y(0) + s\ L\ y(x) \quad \text{(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)}$$

$$= -1 + sz$$

$$L\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \int_0^\infty e^{-sx}\ \frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

$$= \left[e^{-sx}\, y'(x)\right]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-sx}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

$$= 0 - y'(0) + s\,L\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ (বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)}$$

$$= s(sz - 1) = s^2z - s$$

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$s^2z - s + z = 0$$

অথবা $$(s^2 + 1)z = s$$

অথবা $$z = \frac{s}{s^2 + 1}$$

অথবা $$L\,y(x) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

অথবা $$y(x) = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right) = \cos x$$

অথবা $$y(x) = \cos x$$

উদাহরণ ২২

সমাধান কর :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = \sin 2x$$

সমাধান : মনে করি

$$z = L\,y(x) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,y(x)\,dx$$

তাহলে $$L\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

$$= \left[e^{-sx}\,y(x)\right]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-sx}\,y(x)\,dx$$

$$= 0 - y(0) + s.z = -y(0) + sz \quad \text{(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)}$$

$$L\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

$$= \Big[e^{-sx}\,y'(x)\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$

$$= 0 - y'(0) + s\,L\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= -y'(0) + s(-y(0) + sz)$$

$$= -y'(0) - sy(0) + s^2z$$

(বি: দ্র: ১ অনুসারে)

$$L(\sin 2x) = \int_0^\infty e^{-sx}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{s^2}{4}L(\sin 2x)$$

অথবা $$L(\sin 2x) = \frac{2}{s^2+4}$$

কাজেই প্রদত্ত সমীকরণ দাঁড়ায়

$$s^2z - sy(0) - y'(0) + 4(sz - y(0)) + 13z = \frac{2}{s^2+4}$$

অথবা $$z = \frac{y'(0) + (s+4)\,y(0)}{s^2+4s+13} + \frac{2}{(s^2+4)\,(s^2+4s+13)}$$

যেহেতু

$$\frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+9}$$

$$\frac{s+4}{s^2+4s+13} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{2}{(s+2)^2+9}$$

$$\frac{2}{(s^2+4)\,(s^2+4s+13)} = \frac{2}{145}\left(\frac{-4s+9}{s^2+4} + \frac{4s+7}{s^2+4s+13}\right)$$

এবং $$\frac{4s+7}{s^2+4s+13} = \frac{4(s+2)}{(s+2)^2+9} - \frac{1}{(s+2)^2+9}$$

লাপ্লাস রূপান্তরের তালিকা থেকে উপরিউক্ত রাশিগুলির বিপরীত লাপ্লাস রূপান্তর নির্ণয় করতে পারি।

অতএব আমরা পরিশেষে পাই

$$y(x) = \frac{1}{3}\, y'(0)e^{-2x}\sin 3x + y(0)\, e^{-2x}\left(\cos 3x + \frac{2}{3}\sin 3x\right)$$

$$+ \frac{1}{145}\left(9\sin 2x - 8\cos 2x + 8\, e^{-2x}\cos 3x - \frac{2}{3}\, e^{-2x}\sin 3x\right)$$

এখানে প্রান্তিক শর্ত দেওয়া থাকলে $y'(0)$ এবং $y(0)$ এর মান নির্দিষ্টভাবে লেখা যাবে। মনে করি $y(0) = A$ এবং $y'(0) = B$, অথবা মনে করি প্রান্তিক শর্তগুলি হলো $y(0) = y'(0) = 0$, তাহলে নির্ণেয় সমাধান হবে

$$y(x) = \frac{1}{145}\left(9\sin 2x - 8\cos 2x + 8\, e^{-2x}\cos 3x - \frac{2}{3}\, e^{-2x}\sin 3x\right)$$

উদাহরণ ২৩

সমাধান কর : $\qquad \dfrac{\partial T}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

যেখানে প্রান্তিক শর্ত হলো $T = T_0$ যখন $x = 0,\ t > 0$ এবং প্রারম্ভিক শর্ত হলো $T = 0$ যখন $t = 0,\ x > 0$

সমাধান : ফাংশন $T(t)$ এর জন্য লাপ্লাসের রূপান্তর হলো

$$V(x,\ p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, T(t)\, dt \qquad (১)$$

এখন আংশিক সমাকলনের দ্বারা আমরা পাই

$$\int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{\partial T(t)}{\partial t}\, dt = \Big[e^{-pt}\, T(t)\Big]_0^\infty$$

$$+ \int_0^\infty e^{-pt}\, T(t) = PV \qquad (২)$$

(বিঃ দ্রঃ ১ অনুসারে)

তাহলে প্রদত্ত সমীকরণ হতে আমরা পাই

$$e^{-pt}\,\frac{\partial T}{\partial t} = k\, e^{-pt}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

অথবা $$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial T}{\partial t}\,dt = k\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dt$$

$$= k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-pt}\,T(t)\,dt$$

অথবা $$pV = k\,\frac{d^2V}{dx^2}$$

অথবা $$\frac{d^2V}{dx^2} - m^2V = 0\ ,\ m = p/k$$

যা সমাধান করলে পাওয়া যায়

$$V(x\ ,\ p) = Be^{-mx} \qquad (৩)$$

(১) হতে পাওয়া যায়

$$V(0\ ,p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,T_0\,dt = T_0/p \qquad (৪)$$

এবং (৩) হতে পাওয়া যায়

$$V(0\ ,\ p) = B = T_0/p$$

অতএব নির্ণেয় সমাধান হলো

$$V(x,\ p) = \frac{T_0}{p}\,e^{-x\sqrt{p/k}} \qquad (৫)$$

কাজেই লাপ্লাস রূপান্তর তালিকা হতে আমরা বিপরীত রূপান্তর নির্ণয় করতে পারি যার ফলে পাওয়া যায়

$$T = T_0\ \mathrm{erf}\ \{x/2\sqrt{kt}\} \qquad (৬)$$

৫.৬ বিপরীত লাপ্লাস রূপান্তর

মনে করি $L^{-1}\ \{f(s)\}$ একটি ফাংশন যার লাপ্লাস রূপান্তর হলো $f(s)$। কাজেই যদি

$L\ F(t) = f(s)$ হয়, তাহলে

$$F(t) = L^{-1}\ \{f(s)\}$$

ফাংশন $F(t)$ এবং $f(s)$ এর মধ্যে এই সম্পর্ককে বিপরীত লাপ্লাস রূপান্তর বলে। এখানে $F(t)$ হলো $f(s)$ এর বিপরীত রূপান্তর।

উদাহরণ ২৫

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2s}\right\} \text{ নির্ণয় কর।}$$

উত্তর ঃ মনে করি

$$\frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}, \text{ (আংশিক ভগ্নাংশ)}$$

অথবা $$s+1 = A(s+2) + Bs$$

অথবা $$s+1 = (A+B)\,s + 2A$$

এখন $$s=0 \text{ হলে } A = \tfrac{1}{2}$$

এবং $$s=-2 \text{ হলে } B = \tfrac{1}{2}$$

অতএব আমরা পাই

$$\frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+2}$$

অথবা $$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2s}\right\} = \frac{1}{2}\,L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{2}\,L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \text{ (লাপ্লাস রূপান্তরের তালিকা থেকে)}$$

উদাহরণ ২৬

$$L^{-1}\left\{\frac{a^2}{s(s+a)^2}\right\} \text{ নির্ণয় কর।}$$

উত্তর ঃ মনে করি

$$\frac{a^2}{s(s+a)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{(s+a)^2}$$

অথবা $$a^2 = A(s+a)^2 + Bs(s+a) + Cs$$

অথবা $$a^2 = (s+a)^2 - s(s+a) - as$$

অথবা $$\frac{a^2}{s(s+a)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} - \frac{a}{(s+a)^2}$$

অথবা $L^{-1}\left\{\frac{a^2}{s(s+a)^2}\right\} = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right) - aL^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^2}\right\}$

এখন ল্যাপ্লাস রূপান্তরের তালিকা থেকে আমরা পাই

$$L^{-1}\left(\frac{a^2}{s(s+a)^2}\right) = 1 - e^{-at} - at\,e^{-at}$$

উদাহরণ ২৭

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right) \text{ নির্ণয় কর, যেখানে } a^2 \neq b^2$$

উত্তর ঃ যেহেতু আমরা পাই

$$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = \frac{s}{a^2-b^2}\left[\frac{(s^2+a^2)-(s^2+b^2)}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}\right]$$

অথবা $$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right) = \frac{1}{b^2-a^2} L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}\right)$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt), \text{ (তালিকা থেকে)}$$

উদাহরণ ২৮

$$L^{-1} f(s) \text{ নির্ণয় কর, যেখানে } f(s) = \frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$$

উত্তর ঃ মনে করি

$$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}, \text{ (আংশিক ভগ্নাংশ)}$$

যেখানে $A=1,\ B=-1,\ C=2$

অতএব $$\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{1}{s-1} - \frac{s-2}{(s+1)^2+4}$$

অথবা $$f(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{3}{(s+1)^2+4}$$

অথবা $$L^{-1}f(s) = L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}$$
$$+ 3\,L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}$$

এখন লাপ্লাস রূপান্তরের তালিকা হতে আমরা পাই

$$L^{-1}f(s) = e^{t} - e^{-t}\left(\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t\right)$$

প্রশ্নমালা

সমাধান কর :

১। $L^{-1}\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\}$ **উত্তর :** $(1-e^{at})$

২। $L^{-1}\left\{\frac{a^3}{s(s+a)^3}\right\}$ **উত্তর :** $\{1-(1+at+\frac{1}{2}a^2t^2)e^{-at}\}$

৩। $L^{-1}\left\{\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}\right\}$ **উত্তর :** $(1-\cos kt)$

৪। $L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$ **উত্তর :** $(\sin 3t)$

৫। $L^{-1}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+k^2}\right\}$ **উত্তর :** $(e^{-at}\cos kt)$

৬। $L^{-1}\left\{\frac{4s+1}{(s^2+s)(4s^2-1)}\right\}$ **উত্তর :** $e^{t/2} - e^{-t/2} + e^{-t} - 1$

৭। $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\}$ **উত্তর :** $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$

৮। $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-a)(s-b)}\right\}$ **উত্তর :** $\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$

৯। $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-4s}{(2s+1)(s^2+1)}\right\}$ **উত্তর :** $e^{-t/2}-2\sin t$

১০। $y''(t)-k^2y(t)=0\ (k\neq 0)$ **উত্তর :** $y(t)=Ae^{kt}+Be^{-kt}$

১১। $y''(t)+k^2y(t)=a\ (k\neq 0)$

উত্তর : $y(t)=A\sin kt+B\cos kt+\frac{a}{k^2}$

১২। $y''(t) - 2ay'(t) + (a^2 + b^2)y(t) = 0$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ উত্তর : $\dfrac{1}{b}\, e^{at} \sin bt$

১৩। $y''(t) + 4y(t) = \sin t$

$y(0) = y'(0) = 0$ উত্তর : $y(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$

১৪। $y'''(t) + y'(t) = e^{2t}$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

উত্তর : $y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t$

১৫। $y''(t) + y'(t) = t^2 + 2t,$

$y(0) = 4,\ y'(0) = -2$ উত্তর : $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2e^{-t} + 2$

১৬। $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$

$y(0) = 0, \quad y(1) = 2$ উত্তর : $y(t) = 2t\, e^{t-1}$

১৭। $X'(t) + Y'(t) + X(t) + Y(t) = 1,$

$Y'(t) - 2X(t) - Y(t) = 0,$ উত্তর : $X(t) = e^{-t} - 1$

$X(0) = 0, \quad Y(0) = 1$ $\qquad Y(t) = 2 - e^{-t}$

১৮। $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x,$

$\dfrac{dy}{dx} = 1$, যখন $x = 0$,

$y = 0$ যখন $x = \pi$ উত্তর : $y = x + \pi \cos x$

১৯। $y^{(4)}(t) + y'''(t) = \cos t,$

$y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0,$ উত্তর : $y(t) = -1 + t + At^2$

$y''(0)$ যে কোনো মান। $\qquad + \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t)$

ষষ্ঠ অধ্যায়

বেসেলের সমীকরণ ও ফাংশন

৬.১ ভূমিকা

১৮২৪ সালে জ্যোতির্বিদ 'বেসেল' 'গতিশীল জ্যোতির্বিদ্যা' (astronomy) বিষয়ের সমস্যাবলী আলোচনা করতে গিয়ে প্রথমে তিনি বেসেল ফাংশন প্রবর্তন করেন। প্রথমে আমরা বেসেলের সমীকরণ সমাধান করে নিব। বেসেল ফাংশনের ধর্মগুলি পরে আলোচনা করব।

৬.২ বেসেলের অন্তরক সমীকরণ

অন্তরক সমীকরণ

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - n^2 \right) y = 0 \qquad (১)$$

কে বেসেলের n-ক্রম অন্তরক সমীকরণ বলে, যেখানে n হলো ধ্রুবক। প্রকৃতপক্ষে সমীকরণ (১) দ্বিতীয় ক্রমের যোগাশ্রয়ী অন্তরক সমীকরণ। সমীকরণ (১) যোগাশ্রয়ী এবং দ্বিতীয় ক্রম হওয়ায় এর দুটি যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল সমাধান থাকবে। এর সমাধানের জন্য আমরা নিম্নোক্ত আকারের সিরিজ সমাধান বেছে নিতে পারি :

$$y = \sum_{s=0}^{\infty} a_s\, x^{s+r} \qquad (২)$$

এখন (২) হতে y, y', y'' এর মান (১) এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[(r+s)^2 - n^2 \right] a_s x^{s+r} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s\, x^{s+r+2} = 0 \qquad (৩)$$

আমরা যদি (৩) হতে x এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ, (x, x^r, x^{r+1}, x^{r+2} ইত্যাদির সহগ) শূন্যের সাথে সমান করি তাহলে আমরা x^{r+s} এর সহগ হতে পাই

$$a_s \left[(r+s)^2 - n^2 \right] + a_{s-2} = 0 \qquad (৪)$$

যা $s = 0, 1, 2 \cdots \cdots$ মানের জন্য প্রযোজ্য।

ফলে $a_{-1} = 0,\ a_{-2} = 0 \cdots \cdots$।

প্রকাশ থাকে যে (২) এ প্রথম সহগ হলো a_0। এখন $s=0$ হলে (৪) হতে পাওয়া যায় সূচক (indicial) সমীকরণ

$$a_0\left[r^2-n^2\right]=0 \tag{৫}$$

ধরে নি $a_0\neq 0$, তাহলে (৫) হতে পাওয়া যায়

$$r=\pm n \tag{৬}$$

আবার $s=1$ হলে (৪) হতে আমরা পাই

$$a_1\left[(r+1)^2-n^2\right]=0 \tag{৭}$$

যা হতে পাওয়া যায়, r এর যে কোনো মানের জন্য,

$$a_1=0 \tag{৮}$$

এবং $\quad n\neq\pm\frac{1}{2}$

কারণ, a_{-1}, a_{-3} ইত্যাদির মান শূন্য।

এভাবে আমরা যদি $s=3, 5, 7 \cdots \cdots$

বিবেচনা করি তাহলে (৪) হতে পাওয়া যায়

$$a_3=a_5=a_7=\cdots\cdots=0,$$

অর্থাৎ বিজোড় ঘাতের সমস্ত সহগের মান শূন্য। এখন পৌনপুনিক সূত্র (৪) হতে লেখা যায়

$$a_s=-\frac{a_{s-2}}{(r+s+n)(r+s-n)} \tag{৯}$$

এখন $s=2, 4, 6, \cdots\cdots$ ইত্যাদি জোড় সংখ্যার জন্য পাওয়া যায়

$$a_2=-\frac{a_0}{(r+2+n)(r+2-n)}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(r+4+n)(r+4-n)}$$

$$=\frac{a_0}{(r+2+n)(r+4+n)(r+2-n)(r+4-n)}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{(r+6+n)(r+6-n)}$$

$$=-\frac{a_0}{(r+2+n)(r+4+n)(r+6+n)(r+2-n)(r+4-n)(r+6-n)}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

অতএব সমীকরণ (১) এর সমাধান হলো

$$y=a_0x^r\left[1-\frac{x^2}{(r+2+n)(r+2-n)}\right.$$

$$+\frac{x^4}{(r+2+n)(r+4+n)(r+2-n)(r+4-n)}-\cdots\cdots\Bigg] \qquad (১০)$$

বিবেচনা ১ ঃ যদি n পূর্ণ সংখ্যা না হয় এবং $r=+n$, তখন আমরা (১০) হতে পাই

$$y=a_0x^n\left[1-\frac{x^2}{(2n+2)\cdot 2}+\frac{x^4}{(2n+2)(2n+4)\cdot 2\cdot 4}-\cdots\cdots\right]$$

$$=a_0 2^n\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n-\frac{(x/2)^{n+2}}{(n+1)\cdot 1!}+\frac{(x/2)^{n+4}}{(n+1)(n+2)\cdot 2!}-\cdots\cdots\right]$$

এখানে a_0 হলো যে কোনো ধ্রুবক। $a_0=\frac{a\,2^{-n}}{n!}$ বসিয়ে পাওয়া যায় নিম্নোক্ত সমাধান :

$$y=a\left[\frac{(x/2)^n}{n!}-\frac{(x/2)^{n+2}}{(n+1)!\,1!}+\frac{(x/2)^{n+4}}{(n+2)!\,2!}-\cdots\cdots\right]$$

$$=a\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x/2)^{n+2s}}{(n+s)!\,s!} \qquad (১১)$$

এখন (১১) হতে আমরা একটি ফাংশন $J_n(x)$ সংজ্ঞায়িত করতে পারি যা হলো

$$J_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x/2)^{n+2s}}{(n+s)!\,s!} \qquad (১২)$$

ফাংশন $J_n(x)$-কে বেসেলের n ক্রমের প্রথম পর্যায়ের ফাংশন বলে, যেখানে n পূর্ণ সংখ্যা নয়। সিরিজ (১১) বা (১২) এর যে কোনো সসীম মানের জন্য অভিসারী। এটি x এর ফাংশন $J_n(x)$ প্রকাশ করে। যখন n পূর্ণ সংখ্যা নয়, তখন সমীকরণ (১) এর দ্বিতীয় সমাধান পাওয়া যাবে যদি n এর পরিবর্তে $-n$ লেখা যায়। কাজেই (১২) থেকে আমরা পাই

$$J_{-n}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x/2)^{2s-n}}{(s-n)!\,s!} \qquad (১৩)$$

অতএব সমীকরণ (১) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y=A\,J_n(x)+B\,J_{-n}(x) \qquad (১৪)$$

যেখানে A, B যে কোনো ধ্রুবক এবং n পূর্ণ সংখ্যা নয়। কিন্তু একটি বিষয় লক্ষণীয় যে, যখন n পূর্ণ সংখ্যা তখন n এর ধনাত্মক মানই আমরা বিবেচনা করতে পারি। কারণ সমীকরণ (১)-এ n^2 হিসেবে n এর অন্তর্ভুক্তি। এ ক্ষেত্রে $J_{-n}(x)$ এবং $J_n(x)$ পৃথক নয়। $J_{-n}(x)$ এর প্রথম n সংখ্যক পদের হরের মধ্যে $\frac{1}{(s-n)!}$ উৎপাদকটি রয়েছে যা

$$\frac{1}{(s-n)!} = 0 \tag{১৫}$$

যখন $s = 0, 1, 2, \cdots \cdots, (n-1)$

কাজেই এ সকল পদগুলির মান শূন্য হয়ে যায়।

$$\left(\text{বিঃ দ্রঃ} \qquad \frac{1}{(s-n)!} = \frac{1}{(-k)!} = 0, \text{ যখন } s < n\right)$$

অতএব এক্ষেত্রে পাওয়া যায়

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^s \frac{(x/2)^{2s-n}}{s!\,(s-n)!}$$

ধরে নি $s - n = r$, তাহলে আমরা পাই

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{n+r} \frac{(x/2)^{2r+n}}{(r+n)!\,r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^r (x/2)^{2r+n}}{(r+n)!\,r!} = (-1)^n J_n(x)$$

অথবা $\qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad$ (১৬)

যখন $\qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$

ফলে অন্তরক সমীকরণ (১) এর দুটি যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল সমাধান পাওয়া যায় না যা সমীকরণ (১) এর জন্য পাওয়া উচিৎ ছিল। কাজেই যখন n পূর্ণ সংখ্যা তখন সমীকরণ (১) এর জন্য দ্বিতীয় অনির্ভরশীল সমাধান খুঁজে বের করতে হবে।

৬.৩ বেসেলের n ক্রমের দ্বিতীয় পর্যায়ের সমাধান

যখন n পূর্ণ সংখ্যা নয় তখন বেসেলের সমীকরণ (১) এর সাধারণ সমাধান হলো (১৪) অনুসারে,

$$y = A J_n(x) + B J_{-n}(x) \qquad (১৭)$$

কিন্তু যদি n পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে (১৬) হতে আমরা $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ব্যবহার করে পাই

$$y = A J_n(x) + B(-1)^n J_n(x)$$
$$= \{A + B(-1)^n\} J_n(x)$$
$$= C J_n(x)$$

যেখানে C হলো যে কোনো ধ্রুবক। কাজেই বেসেলের সমীকরণের সাধারণ সমাধান পাওয়া যায় না। কারণ উক্ত সমীকরণ দ্বিতীয় ক্রমের যার ফলে তার সাধারণ সমাধানে দুটি অনির্ভরশীল সমাধান থাকবে যাদের কোনো ধ্রুবকের গুণফলের যোগফল হবে উক্ত সমীকরণের সাধারণ সমাধান। আমরা এখন $Y_n(x)$ ফাংশনটি বিবেচনা করি যেখানে এর সংজ্ঞা হলো

$$Y_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi}\left[\cos n\pi\, J_n(x) - J_{-n}(x)\right] \qquad (১৮)$$

এখন যদি n পূর্ণ সংখ্যা না হয়, তাহলে $J_n(x)$ এর উপর ফাংশন $Y_n(x)$ নির্ভরশীল হবে। যেহেতুর এটি $J_n(x)$ এবং $J_{-n}(x)$ এর যোগাশ্রয়ী বিন্যাস, কাজেই $Y_n(x)$ বেসেলের n ক্রমের অন্তরক সমীকরণের সমাধান। এখন যদি n পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে (১৬) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$Y_n(x) = \frac{0}{0} \qquad (১৯)$$

যার মান অনির্দেশ্য।

কাজেই যখন n পূর্ণ সংখ্যা তখন $Y_n(x)$ কে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়

$$Y_n(x) = \underset{r\to n}{Lt}\ \frac{J_r(x)\cos r\pi - J_{-r}(x)}{\sin r\pi} \qquad (২০)$$

এই মান নির্ণয় করা অনেক দীর্ঘ বিষয়। কাজেই আমরা এর চূড়ান্ত ফল ব্যবহার করব যা হলো

$$\frac{\pi}{2}\, Y_0(x) = J_0(x)\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)(x/2)^4}{(2\,!)^2}$$
$$+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{(x/2)^6}{(3\,!)^2} \qquad (২১)$$

যেখানে γ অয়লার ধ্রুবক, যার মান

$$\gamma = \underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \cdots + \frac{1}{n} - \log_n \right) = 0.5772157$$

যখন n যে কোনো ধনাত্মক ধ্রুবক তখন আমরা পাই

$$\pi Y_n(x) = 2J_n(x)\left(\log\frac{x}{2} + \gamma\right)$$

$$-\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{(x/2)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\left(\sum_{m=1}^{n+r} m^{-1} + \sum_{m=1}^{r} m^{-1}\right)$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}\frac{(n-r-1)!}{r!}$$

যেখানে $r = 0$ হলে $\sum_{m=1}^{n+r} m^{-1} + \sum_{m=1}^{r} m^{-1}$ এর পরিবর্তে

আমরা লিখি $\sum_{m=1}^{n} m^{-1}$

ফাংশন $Y_n(x)$ এর মধ্যে লগারিদমিক পদ বর্তমান থাকার অর্থ হলো যে, এ সকল ফাংশন $x = 0$ তে অসীম।

এখন বেসেলের অন্তরক সমীকরণের সাধারণ সমাধান হলো

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \tag{২২}$$

যেখানে C_1 এবং C_2 যে কোনো ধ্রুবক।

৬.৪ $J_n(x)$ এবং $Y_n(x)$ এর মান

বেসেলের অন্তরক সমীকরণ হলো

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{২৩}$$

এখন
$$y = \frac{u}{\sqrt{x}} \tag{২৪}$$

নিয়ে নির্ভরশীল চলক পরিবর্তন করলে বেসেলের সমীকরণ নিম্নোক্ত আকারে পাওয়া যায় :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)u = 0 \qquad (২৫)$$

যখন x এর মান বড় তখন গুণগতভাবে আমরা ধরে নিতে পারি যে, বেসেলের ফাংশনের চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য হবে (২৫) সমীকরণের $\frac{1}{x^2}$ পদ বাদ দিলে যে সমীকরণ দাঁড়ায় তার সমাধানের মতো। অর্থাৎ

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0 \qquad (২৬)$$

যার সমাধান থেকে পাওয়া যায়

$$y = C_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \qquad (২৭)$$

বিস্তারিত বিশ্লেষণ থেকে আমরা পাই

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} J_n(x) \simeq \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - n\pi/2\right)}{\sqrt{\pi x/2}} \qquad (২৮)$$

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} Y_n(x) \simeq \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - n\pi/2\right)}{\sqrt{\pi x/2}} \qquad (২৯)$$

কাজেই x এর বড় মানের জন্য বেসেলের ফাংশন কমতি বিস্তার (amplitude) সম্পন্ন ত্রিকোণোমিতিক ফাংশনের মতো আচরণ করে।

$J_n(x)$ এবং $Y_n(x)$ এর সিরিজ বিস্তার থেকে x এর ছোট মানের জন্য আমরা তাদের নিম্নোক্ত আচরণ লক্ষ্য করি :

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} J_n(x) \simeq \frac{x^n}{2^n n!} \qquad (৩০)$$

$x = 0$ হলে ফাংশন $Y_n(x)$ এর মান সবসময় শূন্য। x এর ছোট মানের জন্য

$$Y_n(x) = \begin{cases} 0\left(\frac{1}{x^n}\right), & n \neq 0 \\ 0\ (\log x), & n = 0 \end{cases} \qquad (৩১)$$

যেখানে 0 ক্রম নির্দেশ করে।

৬.৫ বেসেলের ফাংশনের সিরিজ বিস্তার

যখন n পূর্ণ সংখ্যা তখন কোনো কোনো সময় $J_n(x)$ কে বেসেলের সহগ (coefficient) বলে। এই ফাংশনকে নিম্নোক্ত বিস্তারে t এর ঘাতের সহগ হিসেবে পাওয়া যায় :

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n t^n = \exp\left[\frac{x}{2}(t - t^{-1})\right] \qquad (৩২)$$

অর্থাৎ $$\exp\left[\frac{x}{2}(t - t^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n \qquad (৩৩)$$

এই সিরিজটি t এর উচ্চক্রম এবং নিম্নক্রমের অসীম সিরিজ। গণিতের ভাষায় এ ধরনের সিরিজের নাম লরেন্ট সিরিজ। সম্পর্ক (৩৩) প্রমাণের জন্য আমরা নিম্নোক্ত ভাবে অগ্রসর হব :

বামপক্ষ $$= \exp\left[\frac{x}{2}(t - t^{-1})\right] = \exp\left(\frac{tx}{2}\right)\exp\left(-\frac{x}{2t}\right)$$

$$= \left[1 + \frac{(xt/2)}{1!} + \frac{(xt/2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(xt/2)^n}{n!} + \cdots\right] \times$$

$$\left[1 - \frac{(x/2t)}{1!} + \frac{(x/2t)^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{(x/2t)^n}{n!} + \cdots\right]$$

এই গুণফলে t^n এর সহগ হলো

$$A_n = \frac{(x/2)^n}{n!} - \frac{(x/2)^{n+2}}{(n+1)!\,1!} + \frac{(x/2)^{n+4}}{(n+2)!\,2!} - \cdots$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x/2)^{n+2s}}{(n+s)!\,s!} = J_n(x)$$

কাজেই আমরা পাই

$$\exp\left[\frac{x}{2}(t - t^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n \qquad (৩৪)$$

ফাংশন $\exp\left[\frac{x}{2}(t-t^{-1})\right]$ কে $J_n(x)$ এর উৎস (generating function) ফাংশন বলে, যেখানে $n = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$ ।

এখন (৩৪) হতে আমরা পাই

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n$$

$$= J_0(x) + J_1(x)t + J_2(x)t^2 + J_3(x)t^3 + \cdots\cdots$$

$$+ J_{-1}(x)t^{-1} + J_{-2}(x)t^{-2} + J_{-3}(x)t^{-3} + \cdots\cdots$$

$$= J_0(x) + J_1(x)\left(t - \frac{1}{t}\right) + J_2(x)\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

$$+ J_3(x)\left(t^3 - \frac{1}{t^3}\right) + \cdots\cdots \qquad (৩৫)$$

সমীকরণ (১৬) অনুসারে।

এখানে $t = e^{i\theta}$, $i = \sqrt{-1}$ লিখে (৩৫) হতে পাওয়া যায়

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \cdots\cdots$$

$$+ 2i\left[J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + \cdots\cdots\right] \qquad (৩৬)$$

আমরা জানি

$$e^{ix\sin\theta} = \cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta)$$

কাজেই (৩৬) থেকে উভয় পক্ষের যথাক্রমে বাস্তব ও অবাস্তব অংশগুলি সমান করে পাওয়া যায়

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \cdots\cdots \qquad (৩৭)$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\left[J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + \cdots\cdots\right] \qquad (৩৮)$$

যদি (৩৭) এবং (৩৮)-এ θ এর পরিবর্তে $\frac{\pi}{2} - \theta$ লেখা যায় তবে আমরা পাই

$$\cos(x\cos\theta) = J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta - \cdots\cdots \qquad (৩৯)$$

$$\sin(x\cos\theta) = 2\left[J_1(x)\cos\theta - J_3(x)\cos 3\theta + \cdots\cdots\right] \qquad (৪০)$$

গণিতের ভাষায় এই সিরিজগুলিকে জ্যাকোবির সিরিজ বলে। যদি (৩৭) এর সকল পদকে $\cos n\theta$ এবং (৩৮) এর সকল পদকে $\sin n\theta$ দ্বারা গুণ করি এবং সেগুলিকে $(0, \pi)$ ব্যবধানের উপর সমাকলন করি তাহলে নিম্নোক্ত ফলগুলি পাওয়া যায় :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ শূন্য বা জোড় } \\ 0, & n \text{ বিজোড় } \end{cases} \qquad (৪১)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ বিজোড় } \\ 0, & n \text{ জোড় } \end{cases} \qquad (৪২)$$

এখন (৪১) এবং (৪২) থেকে আমরা পাই

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(x\sin\theta)\cos n\theta + \sin(x\sin\theta)\sin n\theta]d\theta \quad (৪৩)$$

যেখানে n জোড় বা বিজোড় সংখ্যা। অতএব,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta \qquad (৪৪)$$

যেখানে n যে কোনো সংখ্যা।

এই সমাকলনগুলি মূলত বেসেলের তৈরি। জ্যোতির্বিদ্যার কাজের মধ্যে তিনি (৪৪) সমাকলনটি পান। বিশেষ ক্ষেত্রে যখন $n = 0$ তখন (৪৪) হতে পাওয়া যায় :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta \qquad (৪৫)$$

উক্ত আলোচনাতে আমরা ধরে নিব যে, প্রথম পর্যায়ের বেসেলের সহগ (৩৩) অথবা এর সমতুল (৪৪) দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

৬.৬ পৌনপুনিক সম্পর্ক

আমরা সমীকরণ (৩৩) হতে লিখতে পারি

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \cdots\cdots \qquad (৪৬)$$

উক্ত সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে পাই

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)\,t^n$$

যা সমতুল্যভাবে লেখা যায় নিচের আকারে :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[J_n(x)t^{n+1}-J_n(x)t^{n-1}\right]-\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x)t^n=0$$

এটি হতে t^n এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায়

$$2J_n'(x)=J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x) \qquad (৪৭)$$

অপরপক্ষে যদি (৪৬) কে t সাপেক্ষে অন্তরকরণ করা যায় তাহলে দাঁড়ায়

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,J_n(x)t^{n-1}$$

যা সমতুল্যভাবে পাওয়া যায়

$$\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(t^n+t^{n-2})\,J_n(x)-\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}=0$$

এ থেকে t^{n-1} এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায়

$$\frac{2n}{x}J_n(x)=J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x) \qquad (৪৮)$$

এখন (৪৭) এবং (৪৮) যোগ করে পাওয়া যায়

$$xJ_n'(x)=xJ_{n-1}(x)-nJ_n(x) \qquad (৪৯)$$

আবার (৪৭) এবং (৪৮) বিয়োগ করলে হয়

$$xJ_n'(x)=nJ_n(x)-x\,J_{n+1}(x) \qquad (৫০)$$

সমীকরণ (৫০)-এ $n=0$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$J_0'(x)=-J_1(x) \qquad (৫১)$$

এবং (৪৯)-এ $n=1$ বসিয়ে দিলে দাঁড়ায়

$$J_1'(x)=J_0(x)-\frac{1}{x}\,J_1(x) \qquad (৫২)$$

আবার (৫১) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে আমরা পাই

$$J_0''(x) = -J_1'(x)$$

এখন (৫২) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$J_0''(x) = -J_0(x) + \frac{1}{x} J_1(x)$$

এবং এতে (৫১) ব্যবহার করে আমরা পাই

$$J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) = 0 \qquad (৫৩)$$

(৫৩) থেকে আমরা বলতে পারি যে, $y = J_0(x)$ হলো নিম্নোক্ত অন্তরক সমীকরণের সমাধান :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (৫৪)$$

(৫০) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করলে আমরা পাই

$$xJ_n''(x) + J_n'(x) = nJ_n'(x) - J_{n+1}(x) - xJ_{n+1}'(x) \qquad (৫৫)$$

আবার (৫০) থেকে আমরা পাই

$$nJ_n'(x) = \frac{n^2}{x} J_n(x) - n\, J_{n+1}(x) \qquad (৫৬)$$

এবং (৪৯)-এ n এর পরিবর্তে n + 1 বসিয়ে দিলে পাওয়া যায়

$$xJ'_{n+1} + (n+1)\, J_{n+1}(x) = x\, J_n(x) \qquad (৫৭)$$

এখন (৫৫), (৫৬) এবং (৫৭) থেকে আমরা পাই

$$xJ_n''(x) + J_n'(x) = \frac{n^2}{x} J_n(x) - xJ_n(x)$$

অথবা $$J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0 \qquad (৫৮)$$

(৫৮) থেকে এটি দেখা যায় যে, $y = J_n(x)$ হলো নিম্নোক্ত অন্তরক সমীকরণের সমাধান :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad (৫৯)$$

যেখানে n পূর্ণ সংখ্যা।

(৫৩) কে x^{-n-1} দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়

$$x^{-n} J_n'(x) = x^{-n-1} n J_n(x) - x^{-n} J_{n+1}(x) \qquad (৬০)$$

অথবা
$$\frac{d}{dx}\Big(x^{-n} J_n(x) \Big) = - x^{-n} J_{n+1}(x) \qquad (৬১)$$

আবার (৪৯) কে x^{n-1} দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়

$$x^n J_n'(x) + n x^{n-1} J_n(x) = x^n J_{n-1}(x) \qquad (৬২)$$

অথবা
$$\frac{d}{dx}\Big(x^n J_n(x) \Big) = x^n J_{n-1}(x) \qquad (৬৩)$$

আমরা আরো পাই যে,

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = J_0(x) + J_1(x)t + J_2(x)t^2 + \cdots \cdots$$
$$- \frac{1}{t} J_1(x) + \frac{1}{t^2} J_2(x) \qquad (ক)$$

এবং
$$\exp\left[-\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t} - t \right) \right]$$
$$= J_0(x) + \frac{1}{t} J_1(x) + \frac{1}{t^2} J_2(x) + \cdots\cdots$$
$$- J_1(x)t + J_2(x)t^2 + \cdots\cdots \qquad (খ)$$

এখন (ক) এবং (খ) গুণ করে আমরা পাই

$$1 = \left[J_0(x) + J_1(x)t + J_2(x)t^2 + \cdots \cdots - \frac{J_1(x)}{t} + \frac{J_2(x)}{t^2} - \cdots\cdots \right]$$
$$\times \left[J_0(x) + \frac{J_1(x)}{t} + \frac{J_2(x)}{t^2} + \cdots\cdots - J_1(x)t + J_2(x)t^2 - \cdots \cdots \right]$$

এর ধ্রুবক পদগুলি উভয় দিক থেকে সমান করে পাওয়া যায়

$$1 = J_0^2(x) + 2J_1^2(x) + 2J_2^2(x) + \cdots \cdots \qquad (৬৪)$$

আবার যদি (৬৩) কে নিম্নোক্তভাবে লিখি :

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\Big(x^n J_n(x) \Big) = x^{n-1} J_{n-1}(x) \qquad (৬৫)$$

তাহলে আমরা দেখতে পাই যে, যদি m ধনাত্মকপূর্ণ সংখ্যা এবং $m < n$ হয়, তবে

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m x^n J_n(x) = x^{n-m} J_{n-m}(x) \qquad (৬৬)$$

অনুরূপভাবে (৬১) থেকে আমরা লিখতে পারি

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(x^{-n}J_n(x)\right) = -x^{-n-1}J_{n+1}(x) \qquad (৬৭)$$

এবং
$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m\left(x^{-n}J_n(x)\right) = (-1)^m x^{-n-m}J_{n+m}(x) \qquad (৬৮)$$

৬.৭ $J_n(x)$ এর বিস্তার যখন n এর মান বিজোড় সংখ্যার অর্ধেক

যখন n এর মান বিজোড় সংখ্যার অর্ধেক তখন বেসেলের ফাংশনগুলি গুরুত্বপূর্ণ। কারণ এ ক্ষেত্রে বেসেল ফাংশনগুলিকে মৌলিক ফাংশনের সাহায্যে সসীম আকারে প্রকাশ করা যায়।

বেসেল ফাংশনের সাধারণ সিরিজ (৫৭)-তে $n=\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(x/2)^{2s+\frac{1}{2}}}{s!\,(s+\frac{1}{2})!} \qquad (৬৯)$$

যেহেতু

$$r! = r\,(r-1)! \qquad (৭০)$$

কাজেই

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2^{1/2}(\frac{1}{2})!}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\cdots\right) \qquad (৭১)$$

কিন্তু আমরা জানি

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (৭২)$$

এবং
$$\frac{\sin x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\cdots\right) \qquad (৭৩)$$

অতএব (৭১) হতে পাওয়া যায়

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x \qquad (৭৪)$$

অপরপক্ষে যদি আমরা (৫৭) তে $n=-\frac{1}{2}$ ধরি তাহলে পাওয়া যায়

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x \qquad (৭৫)$$

এখন (৪৮) তে $n = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) = J_{-1/2}(x) + J_{3/2}(x) \qquad (৭৬)$$

কাজেই

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \qquad (৭৭)$$

আবার (৪৮)-এ $n = \frac{3}{2}$ বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{3}{x} J_{3/2}(x) = J_{1/2}(x) + J_{5/2}(x) \qquad (৭৮)$$

অথবা

$$J_{5/2}(x) = \frac{3}{x} J_{3/2}(x) - J_{1/2}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3 - x^2}{x^2} \sin x - \frac{3}{x} \cos x\right) \qquad (৭৯)$$

একই নিয়মে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে

$$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right) \qquad (৮০)$$

$$J_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3}{x} \sin x . 1 . \frac{3 - x^2}{x^2} \cos x\right) \qquad (৮১)$$

৬.৮ বেসেল সহগের সমাকলন আকার

বেসেল সহগের সমাকলন আকার প্রকাশ ইতিপূর্বে (১৩)-তে বর্ণনা করা হয়েছে। এই অনুচ্ছেদে আমরা অন্য একটি সহজ সমাকলন আকারে বেসেল সহগের আলোচনা করব। এ ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সমাকলনটি আমরা বিবেচনা করব :

$$I = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{n - \frac{1}{2}} e^{ixt} dt \qquad (৮২)$$

যেখানে $n > -\frac{1}{2}$; যদি আমরা exp (ixt) কে (ixt) এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমে বিস্তার করি তাহলে সমাকলন (৮২) এর মান দাঁড়ায়

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ix)^s}{s!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-1/2}\, t^s\, dt \tag{৮৩}$$

যদি s বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে এই সমাকলনের মান শূন্য হয় এবং যদি s জোড় পূর্ণ সংখ্যা হয়, মনে করি 2r, তাহলে সমকলনের মান দাঁড়ায়

$$\int_{0}^{1} (1-u)^{n-1/2}\, u^{r-1/2}\, du = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+r+1)} \tag{৮৪}$$

কাজেই

$$I = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r\, x^{2r}}{(2r)!} \quad \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\ \Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+r+1)}$$

$$= \Gamma(\tfrac{1}{2})\ \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\, x^{2r}}{r!\ \Gamma(n+r+1) 2^{2r}} \tag{৮৫}$$

যেহেতু $\qquad \Gamma(\frac{1}{2})\ (2r)! = 2^{2r}\ r!\ \Gamma(r+\frac{1}{2})$

এখন (৮৫)-তে $J_n(x)$ এর সিরিজ বিস্তার (১২) ব্যবহার করে আমরা পাই

$$J_n(x) = \frac{(x/2)^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n-1/2}\, e^{ixt}\ dt \tag{৮৬}$$

এটি হতে সহজেই দেখানো যায় যে

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_{0}^{1} (1-t^2)^{n-1/2} \cos(xt)dt \tag{৮৭}$$

বিশেষ ক্ষেত্রে যখন $n = 0$ তখন

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{\cos(xt)\ dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{৮৮}$$

যদি (৮৮)-তে $t = \cos\theta$ বসানো যায় তবে

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1}\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\sin^{2n}\theta\,d\theta \qquad (৮৯)$$

আবার যদি (৮৮)-তে $t = \sin\theta$ বসানো যায় তবে,

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1}\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\cos^{2n}\theta\,d\theta \qquad (৯০)$$

বিশেষ ক্ষেত্রে যদি $n = 0$ ধরা যায় তবে আমরা পাই

$$\left.\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\,d\theta \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,d\theta \end{aligned}\right\} \qquad (৯১)$$

৬.৯ বেসেল সহগের যোগ সূত্র

আমরা বেসেল সহগের যোগ সূত্র নির্ণয় করব যার ব্যবহার বিশেষ বিশেষ অবস্থাতে ব্যাপক। এখন (৩৪) অনুসারে আমরা পাই

$$\exp\left[\frac{1}{2}(x+y)\left(t-\frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(n+y)\,t^n \qquad (৯২)$$

বামপক্ষকে গুণফল

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\cdot\exp\left[\frac{y}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

আকারে লিখে তাদের সঠিক সিরিজ ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(n+y)\,t^n = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_r(x)\,J_s(y)\,t^{r+s} \qquad (৯৩)$$

এটি হতে t^n এর সহগ সমান করে আমরা পাই

$$J_n(x+y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x)\, J_{n-r}(y) \tag{২৪}$$

যা বেসেল সহগের যোগসূত্র নামে পরিচিত। শুধু ধনাত্মক আকারে (২৪) কে প্রকাশ করার জন্য তার ডানপক্ষকে নিম্নোক্তভাবে লিখতে পারি :

$$\sum_{r=-\infty}^{-1} J_r(x)\, J_{n-r}(y) + \sum_{r=0}^{n} J_r(x)\, J_{n-r}(y)$$

$$+ \sum_{r=n+1}^{\infty} J_r(x)\, J_{n-r}(y)$$

এখন (১৬) ব্যবহার করে প্রথম পদকে লেখা যায় :

$$\sum_{r=-\infty}^{-1} (-1)^r J_{-r}(x)\, J_{n-r}(y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r J_r(x)\, J_{n+r}(y)$$

অনুরূপভাবে তৃতীয় পদকে লেখা যায় এভাবে :

$$\sum_{r=1}^{\infty} J_{n+r}(x)\, J_{-r}(y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r J_{n+r}(x)\, J_r(y)$$

কাজেই আমরা শেষ পর্যন্ত পাই

$$J_n(x+y) = \sum_{r=0}^{\infty} J_r(x)\, J_{n-r}(y)$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \{J_r(x)\, J_{n+r}(y) + J_{n+r}(x)\, J_r(y)\} \tag{২৫}$$

৬.১০ নিউম্যান (Neumann) বেসেল ফাংশন

বেসেল সমীকরণ (১)-এ যখন $n=0$ অথবা পূর্ণ সংখ্যা তখন $J_n(x)$ এবং $J_{-n}(x)$ একে অপরের উপর স্বাধীন নয়। কাজেই দ্বিতীয় সমাধান নির্ণয় করার জন্য আমরা মনে করি $n=0$ এবং

$$w = \sum_{r=0}^{\infty} c_r\, x^{r+q} \tag{৯৬}$$

এখন পৌনপুনিক সম্পর্ক (৯) সিদ্ধ করার জন্য আমাদের অবশ্যই পেতে হবে

$$w = x^q \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-x/4)^r}{r!\,(q+1)_r} \tag{৯৭}$$

যেখানে $\quad (q)_r = q\,(q+1)\,(q+2)\cdots\cdots(q+r-1) = \dfrac{\Gamma(q+r)}{\Gamma(q)}$

এখানে (৯৭)-তে $q=0$ বসিয়ে আমরা প্রথম সমাধান পাই

$$w_0 = J_0(x) \tag{৯৮}$$

আমরা নিম্নোক্ত ফল

$$\frac{\partial}{\partial q}\,\frac{1}{(q+1)_r} = -\frac{1}{(q+1)_r}\left\{\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{q+s}\right\}$$

ব্যবহার করে দেখতে পাই যে,

$$\frac{\partial w}{\partial q} = w\log x - x^q \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-x/4)^r}{r!\,(q+1)_r}\left\{\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{q+s}\right\}$$

এতে $q=0$ এবং (৯৮) ব্যবহার করে দ্বিতীয় সমাধান $\left(\dfrac{\partial w}{\partial q}\right)_{q=0}$ পাই, যেখানে

$$Y_0(x) = J_0(x)\log x - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-x/4)^r}{(r!)^2}\,\phi(r) \tag{৯৯}$$

এবং $\qquad \phi(r) = \displaystyle\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{s} \qquad (১০০)$

উপরোক্ত ফাংশন $Y_0(x)$ কে শূন্য ক্রমের দ্বিতীয় পর্যায়ের নয়ম্যান (Neumann's) বেসেল ফাংশন বলে।

সহিত যদি আমরা $Y_0(x)$ এর সাথে $J_0(x)$ এর কোনো ধ্রুবক গুণফল যোগ করি তবে তাও অন্তরক সমীকরণ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (১৬১)$$

এর সমাধান হবে। বিশেষ করে ফাংশন

$$Z_0(x)=\frac{2}{\pi}\{Y_0(x)-(\log 2-\gamma)J_0(x)\} \qquad (১৬২)$$

যেখানে γ হলো অয়লার ধ্রুবক। উক্ত সমীকরণের দ্বিতীয় সমাধান। উপরোক্ত ফাংশন $Z_0(x)$ কে শূন্য ক্রমের দ্বিতীয় পর্যায়ের ওয়েবার (Weber's) বেসেল ফাংশন বলে।

কোনো কোনো ক্ষেত্রে প্রথম পর্যায় এবং দ্বিতীয় পর্যায়ের বেসেল ফাংশনের জটিল সমাবেশ করে সুবিধাজনক ফল পাওয়া যায় এবং নতুন আর একটি ফাংশন বেরিয়ে আসে। এই নতুন ফাংশনগুলি নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত হয়ে থাকে :

$$H_n^1(x)=J_n(x)+i\,Y_n(x) \qquad (১৬৩)$$

$$H_n^2(x)=J_n(x)-i\,Y_n(x) \qquad (১৬৪)$$

যেখানে $i=\sqrt{-1}$

এখানে ফাংশন $H_n^1(x)$ এবং $H_n^2(x)$ কে n ক্রমের তৃতীয় পর্যায়ের বেসেল ফাংশন বলে, যা n ক্রমের হাঙ্কেল (Hankel) ফাংশন নামে অভিহিত। এই ফাংশনগুলি জটিল মানসম্পন্ন।

৬.১১ সংশোধিত বেসেল ফাংশন

আমরা অন্তরক সমীকরণ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(-1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \qquad (১৬৫)$$

বিবেচনা করি। এর সমাধানের জন্য ৬.২ অনুচ্ছেদের নিয়ম অনুসারে অগ্রসর হলে আমরা দেখাতে সক্ষম হব যে, যখন n শূন্য নয়, $n\neq 0$ এবং এটি পূর্ণ সংখ্যাও নয় তখন উক্ত সমীকরণের সমাধান হবে

$$y=A\,I_n(x)+B\,I_{-n}(x) \qquad (১৬৬)$$

এখানে A এবং B যে কোনো ধ্রুবক এবং ফাংশন $I_n(x)$ হলো

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x^2/4)^r}{r!\,(n+1)} \qquad (১০৭)$$

এবং (১০) এর সাথে তুলনা করলে পাওয়া যায়

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \qquad (১০৮)$$

যাকে সমীকরণ (১) এর একটি মনোপযোগী সমাধান হিসেবে ধরা হয়। ফাংশন $I_n(x)$ কে n ক্রমের প্রথম পর্যায়ের সংশোধিত ফাংশন বলে। আর একটি মৌলিক সমাধান নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় :

$$K_n(x) = \frac{\pi/2}{\sin n\pi}\left[\, I_{-n}(x) - I_n(x)\,\right] \qquad (১০৯)$$

যেখানে n পূর্ণ সংখ্যা নয়। অতএব (১০৫) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y = A\, I_n(x) + B\, K_n(x) \qquad (১১০)$$

যেখানে A, B যে কোনো ধ্রুবক। ফাংশন $K_n(x)$ কে n ক্রমের দ্বিতীয় পর্যায়ের বেসেল সংশোধিত ফাংশন বলে।

বেসেল ফাংশন $J_n(x)$ এবং $Y_n(x)$ এর সাথে সংশোধিত বেসেল ফাংশন $I_n(x)$ এবং $K_n(x)$ এর তুলনামূলক বৈশিষ্ট্যে দেখা যায় যে, সংশোধিত বেসেল ফাংশনগুলি দোদুল্যমান নয়। x এর বড় মানের জন্য পাই

$$I_0(x) \simeq \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \qquad (১১১)$$

$$K_0(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \qquad (১১২)$$

এবং x এর ছোট মানের জন্য

$$I_0(x) \cong 1 \qquad (১১৩)$$

$$K_0(x) \cong -\log\frac{x}{2} \qquad (১১৪)$$

এখানে উল্লেখ্য যে, $J_n(x)$ এর মতো $In(x)$ এরও বিভিন্ন পৌনপুনিক সম্পর্ক পাওয়া যায়। এ কারণে আমরা (১০৮) থেকে পাই

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(x)$$

n এর পরিবর্তে $-n$ লিখলে পাওয়া যায়

$$I_{-n}(x)=i^{-n}\,J_{-n}(x)$$

এখন (১৬) ব্যবহার করে আমরা পাই

$$I_{-n}(x)=i^{-n}(-1)^n\,J_n(x)$$

অথবা $$I_{-n}(x)=(-1)^n\,i^{-n}J_n(x)=(-1)^n\,I_n(x)$$

অথবা $$I_{-n}(x)=(-1)^n\,I_n(x) \qquad (১১৫)$$

যেখানে n পূর্ণ সংখ্যা। এখন (৪৭) থেকে (৫১) পর্যন্ত পৌনপুনিক সম্পর্কগুলি ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$2I_n'(x)=I_{n-1}(x)+I_{n+1}(x) \qquad (১১৬)$$

$$\frac{2n}{x}I_n(x)=I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x) \qquad (১১৭)$$

$$xI_n'(x)=xI_{n-1}(x)-nI_n(x) \qquad (১১৮)$$

$$xI_n'(x)=nI_n(x)+xI_{n+1}(x) \qquad (১১৯)$$

$$I_0'(x)=I_1(x) \qquad (১২০)$$

অনুরূপভাবে (১৬) এবং (১৮) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dx}\Big(x^{-n}\,I_n(x)\Big)=x^{-n}\,I_{n+1}(x) \qquad (১২১)$$

$$\frac{d}{dx}\Big(x^nI_n(x)\Big)=x^nI_{n-1}(x) \qquad (১২২)$$

$I_n(x)$ এর মতো $K_n(x)$ এর জন্যও পৌনপুনিক সম্পর্ক পাওয়া যায়।

৬.১২ বার (Ber) এবং বাই (Bei) ফাংশন

বৃত্তাকার মুখের তারের মধ্য দিয়ে বিপরীতধর্মী চল-বিদ্যুৎ পরিচালন আলোচনার জন্য নিম্নোক্ত অন্তরক সমীকরণ বিবেচনা করা হয়ে থাকে :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}-iy=0 \qquad (১২৩)$$

এই সমীকরণের অনির্ভরশীল সমাধান হিসেবে আমরা

$I_0(i^{1/2}x)$ এবং $K_0(i^{1/2}x)$ ধরে নিতে পারি।

কেল্‌ভিন (Kelvin) দুটি নতুন ফাংশন $\mathrm{ber}(x)$ এবং $\mathrm{bei}(x)$ প্রবর্তন করেন যা হলো যথাক্রমে $I_0(i^{1/2}x)$ এর বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ। অর্থাৎ

$$\mathrm{ber}(x) + i\ \mathrm{bei}(x) = I_0(i^{1/2}x) \tag{১২৪}$$

$I_0(x)$ এর সংজ্ঞা (১০৭) থেকে আমরা বলতে পারি যে

$$\mathrm{ber}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x^2/4)^{2s}}{(2s\,!)^2} \tag{১২৫}$$

এবং

$$\mathrm{bei}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(x^2/4)^{2s+1}}{\{(2s+1)\,!^2\}} \tag{১২৬}$$

অনুরূপভাবে ফাংশন $\mathrm{ker}(x)$ এবং $\mathrm{kei}(x)$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয় যা $K_0(i^{1/2}x)$ এর যথাক্রমে বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ :

$$\mathrm{ker}(x) + i\ \mathrm{kei}(x) = K_0(i^{1/2}x) \tag{১২৭}$$

৬.১৬ বেসেল ফাংশনের উল্লম্বিক (Orthogonal) ধর্ম

আমরা নিম্নোক্তভাবে u এবং v কে লিখি :

$$u = J_n(a_r x)\ ,\ v = J_n(a_s x)$$

তাহলে বেসেল সমীকরণ (১) থেকে পাওয়া যায়

$$x^2u'' + xu' + (a_r{}^2x^2 - n^2)u = 0 \tag{১২৮}$$

$$x^2v'' + xv' + (a_s{}^2x^2 - n^2)v = 0 \tag{১২৯}$$

এখানে প্রাইম '1' x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করা বুঝায়। উপরিউক্ত সমীকরণ দুটিকে এভাবে লেখা যায় যে,

$$\frac{d}{dx}(xu') + \left(a_r{}^2x - \frac{n^2}{x}\right)u = 0 \tag{১৩০}$$

$$\frac{d}{dx}(xv') + \left((a_s{}^2x - \frac{n^2}{x}\right)v = 0 \tag{১৩১}$$

এখন (১২৮) কে v এবং (১২৯) কে u দ্বারা গুণ করে এবং পরে সেগুলিকে বিয়োগ করে আমরা পাই

$$\frac{d}{dx}\left[x(vu' - uv')\right] + (a_r^2 - a_s^2)xuv = 0 \qquad (১৩২)$$

সমীকরণ (১৩২) কে $(0, a)$ ব্যবধিতে x এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$(a_r^2 - a_s^2)\int_0^a x\, J_n(a_r x)\, J_n(a_s x)\, dx$$

$$= a\left[a_s J_n(a_r a) J_n'(a_s a) - a_r J_n(a_s a) J_n'(a_r a)\right] \qquad (১৩৩)$$

এখন যদি a এর মান এমনভাবে বেছে নেওয়া হলো যাতে ফলে

$$a_s J_n(a_r a)\, J_n'(a_s a) - a_r J_n(a_s a)\, J_n'(a_r s) = 0 \qquad (১৩৪)$$

সমীকরণ (১৩৪) বলবৎ হবে কেবল যদি

$$J_n(a_r a) = J_n(a_s a) = 0$$

কিন্তু এটি তখনই সম্ভব যখন

$$J_n(a a) = 0 \qquad (১৩৫)$$

নিম্নোক্ত শর্তে আমরা (১৩৩) কে বিবেচনা করতে পারি :

শর্ত-১ : $a_r \neq a_s$, তাহলে (১৩৩) এবং (১৩৪) থেকে পাওয়া যায়

$$\int_0^a x\, J_n(a_r x)\, J_n(a_s x)\, dx = 0 \qquad (১৩৬)$$

যেখানে $r, s = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ ।

যদি সমীকরণ (১৩৬) বলবৎ থাকে তাহলে ফাংশন

$x^{\frac{1}{2}} J_n(a_r x)$ এবং $x^{\frac{1}{2}} J_n(a_s x)$ কে $0 \leq x \leq a$ ব্যবধানের উলম্বিক বলা হয় ।

শর্ত-২ : যখন $a_r = a_s$

এ ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$\int_0^a x\left[J_n(a_s x)\right]^2\, dx$$

$$= a \cdot \underset{a_r \to a_s}{\mathrm{Lt}} \frac{a_s J_n(a_r a)\, J_n'(a_s a) - a_r J_n(a_s a) J_n'(a_s a)}{a_r^2 - a_s^2}$$

$$= a \cdot \mathop{Lt}_{a_r \to a_s} \frac{\frac{\partial}{\partial a_r}\{a_s J_n(a_r a) J_n'(a_s a) - a_r J_n(a_s a) J_n'(a_r a)\}}{\frac{\partial}{\partial a_r}(a_r^2 - a_s^2)}$$

$$= a \cdot \mathop{Lt}_{a_r \to a_s} \frac{a a_s J_n'(a_r a) J_n'(a_s a) - J_n(a_s a) J_n'(a_r a) - a_r a J_n(a_s a) J_n''(a_r a)}{2 a_r}$$

$$= a \cdot \frac{a a_s \{J_n'(a_s a)\}^2 - J_n(a_s a) J_n'(a_s a) - a_s a J_n(a_s a) J_n''(a_s a)}{2 a_s}$$

$$= \frac{a^2 a_s \{J_n'(a_s a)\}^2}{2 a_s}$$ (১৩০) ব্যবহার করে

$$= \tfrac{1}{2} a^2 \{J_n'(a_s a)\}^2$$

যেখানে $s = 1, 2, 3, \cdots \cdots$ ।

এখানে (১৩৬) এবং (১৩৭) কে বেসেল ফাংশনের উলম্বিক ধর্ম বলে।

অনুশীলনী

১। প্রমাণ কর যে, $\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(ax)\right] = a x^n J_{n-1}(ax)$

২। দেখাও যে $y = x^{-n/2} J_n(2\sqrt{x})$ হলো অন্তরক সমীকরণ

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (1+n)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

এর সমাধান।

৩। দেখাও যে,

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(3 - x^2)\frac{\sin x}{x^2} - \frac{3\cos x}{x}\right]$$

৪। প্রমাণ কর যে,

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y),$$ n পূর্ণ সংখ্যা।

৫। প্রমাণ কর যে,

$$\int_0^\infty e^{-pt} J_0(at)\,dt = (p^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad p > 0$$

৬। প্রমাণ কর যে,

$$\int_0^\infty J_0(bx)\,dx = \frac{1}{b}$$

৭। প্রমাণ কর যে,

$$\int_0^\infty x J_1(ax)\, e^{-px}\, dx = \frac{a}{(a^2+p^2)^{3/2}}$$

৮। দেখাও যে,

(i) $8 J_n'''(x) = J_{n-3}(x) - 3 J_{n-1}(x) + 3 J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)$

(ii) $4 J_0'''(x) + 3 J_0'(x) + J_3(x) = 0$

৯। দেখাও যে,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} J_n(a) = J_0(\sqrt{a^2 - 2ax})$$

১০। প্রমাণ কর যে,

$$J_n(2\sqrt{x}) = (-1)^n x^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} J_0(2\sqrt{x})$$

১১। প্রমাণ কর যে,

$$J_n'(x)\, J_{-n}(x) - J_n(x)\, J_{-n}'(x) = \frac{A}{x}$$

যেখানে A একটি ধ্রুবক। $J_n(x)$ এবং $J_{-n}(x)$ এর সিরিজ বিবেচনা করে দেখাও যে $A = \frac{2}{\pi} \sin n\pi$, যখন x ক্ষুদ্র।

১২। দেখাও যে,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3} xy = 0$$

এর সমাধান হলো

$$y = \sqrt{x}\{A J_{1/3}(u) + B J_{-1/3}(u)\}$$

যেখানে $u^2 = 4x^3/27$ এবং A, B যে কোনো ধ্রুবক।

১৩। প্রমাণ কর যে,

$$J_0(ax)\,J_0(bx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_0(Rx)\,d\theta$$

যেখানে $R^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

১৪। প্রমাণ কর যে,

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} J_{n+m}(x)$$

সপ্তম অধ্যায়

লেজেন্ডার বহুপদী

(Legender Polynomial)

৭.১ লেজেন্ডার অন্তরক সমীকরণ

অন্তরক সমীকরণ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1) = 0 \qquad (১)$$

কে n মাত্রার লেজেন্ডার অন্তরক সমীকরণ বলে। প্রকৃতপক্ষে এর দ্বিতীয় ক্রমের প্রথম মাত্রার অন্তরক সমীকরণ। কিন্তু লেজেন্ডার অন্তরক সমীকরণের ভাষায় এর নাম 'n মাত্রার লেজেন্ডার অন্তরক সমীকরণ'। এর সমাধানের জন্য মনে করি, এর সিরিজ সমাধান হলো

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r\ x^{m+r} \qquad (২)$$

যদি (২) সমীকরণ (১) এর সমাধান হয় তবে (২) অবশ্যই (১) কে সিদ্ধ করবে। ফলে এটি প্রয়োজনীয় যে (২) কে সমীকরণ (১)-এ প্রতিস্থাপন করে x এর প্রত্যেক ঘাতের সহগকে শূন্যের সাথে সমীকৃত করে নেয়া। কাজেই (২) কে অন্তরক সমীকরণ (১)-এ প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r(m+r)(m+r-1)x^{m+r-2}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty} a_r(n-m-r)(n+m+r+1)\ x^{m+r} = 0$$

এটি হতে x এর সর্ব নিম্ন ঘাতের সহগ শূন্যের সাথে সমান করলে সূচক সমীকরণ (indicial equation) পাওয়া যাবে যা হলো (x^{m-2} এর সহগ)

$$a_0 m(m-1)=0$$

অথবা $$m=0,\ 1 \tag{৩}$$

যেখানে $$a_0 \neq 0$$

এখন x^{m-1} এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায়

$$a_1(m+1)m=0 \tag{৪}$$

যদি $m=0$ হয় তবে a_1 এর মান যে কোনো সংখ্যা হয়। যখন $n \geq 2$ তখন পৌনপুনিক সূত্র হবে

$$a_r(m+r)(m+r-1)=a_{r-2}(r+m-2-n)(r+m+n-1)$$

অথবা $$a_r=\frac{(r-n-2)(r+n-1)}{r(r-1)}a_{r-2} \tag{৫}$$

যেখানে $$m=0$$

যদি $r=n+2$ হয় তবে (৫) থেকে আমরা দেখতে পাই যে

$$a_{n+2}=0$$

ফলে নিম্নোক্তগুলিও শূন্য হয়:

$$a_{n+4}=a_{n+6}=\cdots\cdots=0$$

এখন $r=n$ হলে (৫) থেকে পাওয়া যায়

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}a_n \tag{৬}$$

অতএব

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{2\{2(n-2)-1\}}a_{n-2}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.2.(2n-1)(2n-3)}a_n$$

... ইত্যাদি।

কাজেই সমীকরণ (১) এর একটি সমাধান হলো

$$y=a_n\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.2.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}\cdots\right] \tag{৭}$$

যা n মাত্রার বহুপদী। এই সমাধান (৭) এর শেষ পদ হয় ধ্রুবক হবে না হয় x এর পদ হবে যদি n এর মান যথাক্রমে জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে অনুপাত (ratio) পরীক্ষার সাহায্যে দেখা যায়, সিরিজ (৭) ব্যবধান $(-1,\ +1)$ এর মধ্যে অভিসারী।

সমীকরণ (৬)-এ যদি $n = 2, 4, 6, \cdots$ বসানো যায় তাহলে $a_2, a_4, a_6 \cdots$ ইত্যাদির মান a_0 এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে এবং $n = 3, 5, 7, 9$ বসানো যায় তবে $a_3, a_5, a_7, \cdots \cdots$ ইত্যাদির মান a_1 এর মাধ্যমে পাওয়া যাবে। কাজেই প্রকৃতপক্ষে সমীকরণ (১) এর সমাধান (৭) এর বিকল্প হিসেবে পাওয়া যায়

$$y = a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - \cdots\cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - \cdots \cdots\right] \quad (৮)$$

যেহেতু (৮) এর মধ্যে a_0 এবং a_1 দুটি অনির্ধারিত ধ্রুবক আছে। কাজেই (৮)-কেই সমীকরণ (১) এর সাধারণ সমাধান হিসেবে গণ্য করা যাবে। যদি (৪)-এ $m = -1$ ধরা যায় তবে কেবল (৮) এর দ্বিতীয় সিরিজটি থাকে যা নতুন কোনো সমাধান নয়। অতএব (৭) অথবা (৮) হলো সমীকরণ (১) এর সাধারণ সমাধান যেখানে n যে কোনো সংখ্যা। যদি n ভগ্নাংশ হয় তখন $y(x)$-কে প্রথম পর্যায়ের লেজেন্ডার ফাংশন বলে।

যদি $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ হয় তবে (৭) থেকে n এর পূর্ণ সংখ্যা মানের জন্য লেজেন্ডার বহুপদী $P_n(x)$ পাওয়া যায় যা হলো

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.2.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} \cdots\cdots\right]$$

যাকে সংক্ষিপ্ত আকারে লেখা যায় :

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{N} (-1)^r \frac{(2n-2r)!\, x^{n-2r}}{2^n r!\,(n-r)!\,(n-2r)!} \quad (৯)$$

যেখানে $N = \frac{n}{2}$, n জোড় সংখ্যা এবং

$N = \frac{n-1}{2}$, n বিজোড় সংখ্যা।

সাধারণ লেজেন্ডার বহুপদী (৯) হতে নিম্নোক্ত নির্দিষ্ট বহুপদীগুলি পাওয়া যায় :

$$P_0(x) = 1 \qquad P_4(x) = \tfrac{1}{8}\,(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_1(x) = x \qquad P_5(x) = \tfrac{1}{8}\,(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}\,(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \tfrac{1}{2}\,(5x^3 - 3x)$$

$$P_6(x) = \tfrac{1}{16}\,(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

ইত্যাদি।

৭.২ লেজেন্ডার বহুপদীর রড্রিগ-সূত্র (Rodrigue's formula)

লেজেন্ডার অন্তরক সমীকরণ হতে সরাসরি লেজেন্ডার বহুপদী $P_n(x)$ এর সূত্র নির্ণয় করা যায়। সূত্রটি বেশ গুরুত্বপূর্ণ। মনে করি

$$u(x) = (x^2 - 1)^n \tag{১০}$$

একে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করলে পাওয়া যায়

$$u_1(x) = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}$$

অথবা $$(x^2 - 1)\, u_1(x) = 2n\, x\, (x^2 - 1)^n$$

অথবা $$(x^2 - 1)\, u_1(x) = 2n\, x\, u(x) \tag{১১}$$

লাইবনিজ উপপাদ্যের সাহায্যে $(n+1)$-তম পর্যন্ত (১১) কে অন্তরকলন করলে আমরা পাই

$$(x^2 - 1)u_{n+2} + (n+1)\, 2x\, u_{n+1} + (n+1)\, n\, u_n$$
$$= 2n\, x\, u_{n+1} + 2n(n+1)\, u_n$$

অথবা $$(1 - x^2)\, u_{n+2} - 2x\, u_{n+1} + n(n+1)\, u_n = 0 \tag{১২}$$

যদি $u_n = \dfrac{d^n u}{dx^n}$ স্থাপন করি তাহলে (১২) থেকে পাওয়া যায় নিচের সমীকরণ :

$$(1 - x^2)\frac{d^2 u_n}{dx^2} - 2x\frac{du_n}{dx} + n(n+1)\, u_n = 0 \tag{১৩}$$

যা লেজেন্ডার সমীকরণ (১)। কাজেই u_n লেজেন্ডার সমীকরণকে সিদ্ধ করে। কিন্তু যেহেতু

$$u_n = \frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1)^n \tag{১৪}$$

অতএব u_n হলো n মাত্রার বহুপদী। আবার লেজেন্ডার বহুপদী $P_n(x)$ লেজেন্ডার সমীকরণের সমাধান। কাজে আমরা ধরে নিতে পারি যে

$$P_n(x) = K\, u_n(x) = K \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{১৫}$$

যেখানে K হলো যে কোনো ধ্রুবক। এখন বামপক্ষে (১) থেকে মান বসিয়ে এবং ডানপক্ষকে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots \right]$$

$$= K \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{2n} - n x^{2n-2} + \cdots \right]$$

$$= K \left[2n(2n-1)(2n-2) \cdots (n+1) x^n - \cdots \right]$$

উভয় পক্ষ থেকে x^n এর সহগ সমান করে নিচের মান পাওয়া যায় :

$$\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = K \frac{(1.2.3 \cdots n.(n+1)(n+2) \cdots (2n))}{1.2.3 \cdots n}$$

$$= K \frac{(2n)!}{n!}$$

অতএব
$$K = \frac{1}{2^n n!} \tag{১৬}$$

এখন (১৬) হতে K এর মান (১৫)-তে বসিয়ে আমরা পাই

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{১৭}$$

যা লেজেন্ডার বহুপদীর জন্য রড্রিগের সূত্র নামে পরিচিত।

৭.৩ দ্বিতীয় পর্যায়ের লেজেন্ডার ফাংশন

লেজেন্ডার সমীকরণ (১) এর সমাধান (৭) অনুসারে পাওয়া যায়

$$y_1(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \cdots \tag{১৮}$$

আবার যদি আমরা দ্বিতীয় সমাধানের জন্য লিখি

$$y_2(x) = x^{-n-1} \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r}$$

তাহলে আমরা পাই

$$y_2(x) = x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)} x^{-n-3} + \cdots \qquad (১৯)$$

যেখানে n হলো ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার অর্ধেক ছাড়া যে কোনো সংখ্যা। যদি n পূর্ণ সংখ্যা হয় তখন $y_1(x)$ অভিসারী হয়। অর্থাৎ $y_1(x)$ হলো n মাত্রার বহুপদী। একে $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ দ্বারা গুণ করলে লেজেন্ডার বহুপদী $P_n(x)$ পাওয়া যাবে। অপরপক্ষে যখন $n > -1$ তখন $y_2(x)$ অভিসারী হবে না। সেক্ষেত্রে n পূর্ণ সংখ্যা হলেও $y_2(x)$ বহুপদী হবে না। এই সিরিজকে

$$\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\,\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

দ্বারা গুণ করলে আরেকটি ফাংশন $Q_n(x)$ পাওয়া যায়। ফাংশন $Q_n(x)$ কে যেভাবে নির্ণয় করা হলো তাকে n মাত্রার দ্বিতীয় পর্যায়ের লেজেন্ডার ফাংশন বলে, যদিও n পূর্ণ সংখ্যা তথাপিও এটি বহুপদী নয়। এই সংজ্ঞা অনুসারে লেজেন্ডার সমীকরণ (১) এর সমাধান হবে

$$y = A\,P_n(x) + B\,Q_n(x) \qquad (২০)$$

যেখানে A, B হলো যে কোনো ধ্রুবক।

৭.৪ লেজেন্ডার বহুপদীর উৎস ফাংশন

আমরা যদি $P_n(x)$ কে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করি :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,h^n = \frac{1}{\sqrt{(1-2xh+h^2)}} \qquad (২১)$$

যেখানে $|h| < 1$, তাহলে ফাংশন

$$\psi(x, h) = \frac{1}{\sqrt{(1-2xh+h^2)}} \qquad (২২)$$

কে লেজেন্ডার বহুপদীর উৎস ফাংশন বলে।

সম্পর্ক (২১) থেকে এটি পরিষ্কার যে h^n এর সহগ $P_n(x)$ হলো x এর বহুপদী। উক্ত সম্পর্ক প্রমাণের জন্য আমরা দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করতে পারি।

অতএব
$$\{1-(2xh-h^2)\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=1+\frac{h}{2}(2x-h)+\frac{1.3}{2^2.2!}h^2(2x-h)^2$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{2^n.n!}h^n(2x-h)^n+\cdots\cdots$$

এই বিস্তারে h^n এর সহগ হলো

$$\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}x^n-\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-3)}{2.(n-2)!}x^{n-2}$$
$$+\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-5)}{2^2.2!(n-4)!}x^{n-4}-\cdots\cdots$$
$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\cdots\cdots\right]$$
$$=P_n(x)$$

কাজেই আমরা $P_n(x)$ এর উৎস হিসেবে পাই $\phi(x, h)$, যেখানে

$$(1-2xh+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n \qquad (২৩)$$

যখন $|h|<1$ এবং তা $-1\leq x\leq 1$ পাল্লার মধ্যে প্রযোজ্য, কেননা এটি দ্বিপদী উপপাদ্যের অভিসারী পাল্লা।

এখন (২৩)-এ $x=1$ বসিয়ে উভয় দিকের h^n এর সহগ সমান করলে দাঁড়ায়

$$P_n(1)=1 \qquad (২৪)$$

যা n এর সমস্ত পূর্ণ মানের জন্য প্রযোজ্য। আবার (২৩)-এ $x=-1$ বসিয়ে আমরা নির্ণয় করতে পারি নিম্নোক্ত সম্পর্ক :

$$P_n(-1)=(-1)^n \qquad (২৫)$$

যা হলো
$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x) \qquad (২৬)$$

এর একটি নির্দিষ্ট মান।

৭.৫ লেজেন্ডার সহগ

মনে করি

$$x=\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad i=\sqrt{-1}$$

তাহলে (২২)-এ x এর এই মান স্থাপন করে আমরা পাই

$$\left[1 - h\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + h^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\, Z^n \qquad (২৭)$$

কিন্তু আমরা জানি

$$\left[1 - h\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + h^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - h e^{i\theta}\right)^{-1/2}\left(1 - h e^{-i\theta}\right)^{-1/2}$$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$\left(1 - h e^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{h e^{i\theta}}{2} + \frac{1.3}{2.4} h^2 e^{2i\theta} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1.3 \cdots (2n-1)}{2.4. \cdots 2n} h^n e^{in\theta} + \cdots \qquad (২৮)$$

$$\left(1 - h e^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{h e^{-i\theta}}{2} + \frac{1.3}{2.4} h^2 e^{-2i\theta} + \cdots$$

$$+ \frac{1.3, \cdots (2n-1)}{2.4, \cdots 2n} h^n e^{-ni\theta} + \cdots \qquad (২৯)$$

এখন (২৮) এবং (২৯) কে গুণ করে তা হতে h^n এর সহগ বেছে নিলে পাওয়া যায়

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1.3.\cdots (2n-1)}{2.4 \cdots 2n}\, 2\cos n\theta$$

$$+ \frac{1.1.3 \cdots (2n-3)}{2.2.4 \cdots (2n-2)}\, 2\cos(n-2)\theta + \cdots \qquad (৩০)$$

এখানে প্রত্যেকটি সহগ হলো ধণাত্মক। কাজেই P_n এর মান সংখ্যানুযায়ী সবচেয়ে বড় হবে যখন $\theta = 0$ হয়।

কিন্তু যেহেতু $\qquad P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1$

কাজেই আমরা পাই

$$|P_n(\cos\theta)| \leq 1,\; n = 0, 1, 2, \cdots$$

উপরিউক্ত সূত্র হতে আমরা কয়েকটি ফাংশন $P_n(\cos\theta)$ নির্ণয় করতে পারি

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = 1/4\,(3\cos 2\theta + 1)$$
$$P_3(\cos\theta) = \tfrac{1}{8}\,(5\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$
$$P_4(\cos\theta) = 1/64\,(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9) \qquad (৩১)$$

৭.৬ পৌনপুনিক সম্পর্ক

আমরা জানি

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,h^n, \quad |x| < 1 \qquad (৩২)$$

উক্ত সম্পর্কের উভয় দিকে h এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$\frac{x-h}{(1-2xh+h^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} P_n(x)$$

অথবা $$(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x) = (1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} P_n(x) \qquad (৩৩)$$

এখন (৩৩) এর উভয় দিক হতে h^n এর সহগ সমান করে পাওয়া যায়

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nx\,P_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

যাকে সংক্ষিপ্ত করে লেখা যায়

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)x\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \qquad (৩৪)$$

এই সম্পর্কটি $|x| < 1$ এর জন্য প্রমাণ করা হলো। কিন্তু যেহেতু তার বামপক্ষ একটি x এর বহুপদী, কাজেই এটি x এর যে কোনো মানের জন্য প্রযোজ্য।

অপরপক্ষে (৩২) কে x এর সাপেক্ষে উভয় দিকে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$\frac{h}{(1-2xh+h^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x) \qquad (৩৫)$$

অথবা $$h\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n = (1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x) \qquad (৩৬)$$

এর উভয় পক্ষ হতে h^n এর সহগ সমান করে পাওয়া যায়

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = n\,P_n(x) \tag{৩৭}$$

যেহেতু এর উভয়পক্ষ x এর বহুপদী, কাজেই x এর সকল মানের জন্য (৩৭) প্রযোজ্য।

পুনরায় (৩৫) হতে আমরা পাই

$$\frac{h}{\sqrt{1-2xh+h^2}} = (1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x)$$

অথবা
$$h\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n = (1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x)$$

অথবা
$$h\,\frac{(1-2xh+h^2)}{x-h}\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1} P_n(x)$$

$$= (1-2xh+h^2)\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n'(x)$$

(৩৩) ব্যবহার করে। এ থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{h}{x-h}\sum_{n=0}^{\infty} nh^{n-1} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\,h^n$$

অথবা
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,h^n P_n(x) = (x-h)\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x)\,h^n$$

এর উভয় দিক থেকে h^n এর সহগ সমান করে নিচের সম্পর্কটি তৈরি করা যায় :

$$n\,P_n(x) = x\,P_n'(x) - P_{n-1}'(x) \tag{৩৮}$$

এর উভয় দিক x এর বহুপদী হওয়ায় এটি x এর সকল মানের জন্য প্রযোজ্য।

(৩৪) কে x এর সাপেক্ষে উভয় দিকে অন্তরকরণ করে আমরা পাই

$$(n+1)P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)x\,P_n'(x)$$
$$+ n\,P_{n-1}'(x) = 0 \tag{৩৯}$$

এখন (৩৮) এবং (৩৯) থেকে $P_n'(x)$ অপসারণ করে পাওয়া যায়

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\,P_n(x) \tag{৪০}$$

আবার (৪০) এবং (৩৮) বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$$P'_{n+1}(x) - x\,P_n'(x) = (n+1)\,P_n(x) \tag{৪১}$$

যা x এর সমস্ত মানের জন্য প্রযোজ্য।

৭.৭ $P_n(x)$ এর উলম্বিকতা

ত্রিকোণোমিতিক ফাংশন cos mx এবং sin mx এর মত লেজেন্ডার $P_n(x)$ উলম্বিক ফাংশন। এই ধর্মের জন্য যে কোনো ফাংশনকে লেজেন্ডার বহুপদীর সিরিজে প্রকাশ করা যায়।

যদি $P_n(x)$ উলম্বিক ফাংশন হয় তবে

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n \tag{৪২}$$

এটি প্রমাণের জন্য আমরা লেজেন্ডার ব্যবহার করে পাই

$$\frac{d}{dx}[\,(1-x^2)\,P_n'(x) + n\,(n+1)\,P_n(x) = 0 \tag{৪৩}$$

সমীকরণ (৪৩) কে $P_m(x)$ দ্বারা গুণ করে পরে তাকে $(-1,\ 1)$ ব্যবধানের মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]\,dx$$

$$+\,n(n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0 \tag{৪৪}$$

এখন প্রথম অংশকে আংশিক সমাকলন করে পাই

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_n'(x)\}\,dx = [\,P_m(x)(1-x^2)\,P_n'(x)]_{-1}^{1}$$

$$-\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, P_n'(x)\, P_m'(x)\, dx \qquad (৪৫)$$

এখন (৪৫) এর প্রথম পদে $(1 - x^2)$ উৎপাদকটি থাকায় $(-1, 1)$ এর উভয় সীমায় তার মান শূন্য। কাজেই প্রথম পদটির মান শূন্য। ফলে

$$-\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, P_n'(x)\, P_m'(x)\, dx$$

$$+\, n(n+1) \int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x) = 0 \qquad (৪৬)$$

এখন (৪৬)-এ m এবং n বদল করে পাওয়া যায়

$$-\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, P_m'(x)\, P_n'(x)\, dx$$

$$+\, m(m+1) \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \qquad (৪৭)$$

(৪৬) এবং (৪৭) বিয়োগ করে দাঁড়ায়

$$(n - m)\,(n + m + 1) \int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \qquad (৪৮)$$

এখন (৪৮) থেকে আমরা লিখতে পারি

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0\,, \quad n \neq m \qquad (৪৯)$$

যেখানে $n = m$ হলে (৪২) পাওয়া যাবে না।

পরবর্তী কাজের জন্য আমরা $P_n(x)$ এর উৎস ফাংশন থেকে শুরু করতে পারি :

$$(1 - 2xh + h^2)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, h^n\right]^2 \qquad (৫০)$$

একে x এর সাপেক্ষে $(-1, 1)$ এর উপর সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xh+h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^{2n} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx \qquad (৫১)$$

যদি $|h| < 1$ হয়। কিন্তু বামপক্ষের সমাকলন হলো

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xh+h^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h}$$

$$= 2\left(1 + \frac{h^2}{3} + \frac{h^4}{5} + \cdots\cdots + \frac{h^{2n}}{2n+1} + \cdots\cdots\right)$$

কাজেই (৫১) এর উভয় পক্ষ থেকে h^{2n} এর সহগ সমান করে পাওয়া যায়

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (৫২)$$

যেখানে $n = 0, 1, 2, 3, \cdots \cdots$

সমীকরণ (৪৯) এবং (৫২) কে একত্রে লিখলে দাঁড়ায়

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn}, \text{ (}\delta_{mn} \text{ হলো ক্রনেকার ডেল্টা)}$$

৭.৮ কোনো ফাংশনকে লেজেন্ডার বহুপদীর সিরিজে বিস্তার

যদি $F(x)$ এবং এর জাতক $(-1, 1)$ ব্যবধানের উপর ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $F(x)$ কে নিম্নোক্তভাবে লেজেন্ডার বহুপদী সিরিজে প্রকাশ করা যায় :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, P_n(x) \qquad (৫৩)$$

এখন সাধারণ সহগ a_n নির্ণয়ের জন্য (৫৩) কে $P_m(x)$ দ্বারা গুণ করি এবং $(-1, 1)$ ব্যবধানের উপর সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_{-1}^{1} F(x)\, P_m(x)\, dx = a_m \int_{-1}^{1} [P_m(x)]^2 dx = \frac{2a_m}{2m+1} \qquad (৫৪)$$

এটি থেকে আমরা বলতে পারি যে, (৫৩) এর সাধারণ সহগ a_n নিম্নোক্তভাবে পাওয়া যায় :

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)\, P_n(x)\, dx \qquad (৫৫)$$

এখানে বলা যায় যে, বিস্তার (৫৩) হলো কোনো ফাংশনকে ফুরিয়ার সিরিজে বিস্তারের অনুরূপ।

পাদটিকা : $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$

৭.৯ রড্রিগের (Rodrigue) সূত্রের ব্যবহার

লেজেন্ডার বহুপদীর সাথে সংশ্লিষ্ট নির্দিষ্ট সমাকলনের মান নির্ণয়ের জন্য রড্রিগ সূত্রের গুরুত্ব অনেক। উদাহরণস্বরূপ আমরা নিম্নোক্ত সমাকলনটি বিবেচনা করতে পারি :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx \qquad (৫৬)$$

রড্রিগ সূত্রের সাহায্যে সমাকলনটি এভাবে লেখা যায় যে,

$$I = \frac{1}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1} f(x)\, \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n\, dx$$

আংশিক সমাকলনের নিয়ম অনুসারে আমরা পাই

$$I = \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}$$

$$-\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^2-1)^n\, dx$$

এর প্রথম অংশটি সীমার উভয় প্রান্তে মান শূন্য হয়। ফলে

$$I = -\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f'(x)\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(x^2-1)^n\, dx$$

এভাবে সমাকলনটি নিয়ে অগ্রসর হলে শেষ পর্যন্ত পাওয়া যাবে

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^n(x)\, dx \qquad (৫৭)$$

উদাহরণস্বরূপ যদি $f(x) = P_m(x)$ হয়, যেখানে $m < n$ তাহলে $I = 0$, ফলে দাঁড়ায়

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0, \quad (m \neq n) \qquad (৫৮)$$

যদি $f(x) = P_n(x)$ হয় তাহলে,

$$f^n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

কাজেই আমরা পাই

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

গামা ফাংশনের মানগুলি বসিয়ে দিলে পাওয়া যায়

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (৫৯)$$

(৫৮) এবং (৫৯) কে একত্রিত করলে নিম্নোক্ত ফলটি পাওয়া যায় যা হলো

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{m,n} \qquad (৬০)$$

যেখানে $\delta_{m,n}$ ক্রনেকার ডেল্টা যার মান

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

অনুরূপভাবে, যদি $f(x) = x^m$ হয় যেখানে m একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, তাহলে

$$f^n(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, & \text{যদি } m \geq n \\ 0 & \text{, যদি } m < n \end{cases}$$

কাজেই যখন $m \geq n$ সে ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\, dx = \frac{\Gamma(m+1)}{2^n\, \Gamma(m-n+1) n!} \int_{-1}^{1} x^{m-n}(1-x^2)^n\, dx$$

যদি $m-n$ একটি বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে ডানপক্ষের সমাকলনের মান শূন্য হয়। কিন্তু $m-n$ যদি জোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে এর মান দাঁড়ায়

$$2\int_{0}^{1} x^{m-n}(1-x^2)^n\, dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2})\, \Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2})}$$

কাজেই যখন m একটি পূর্ণ সংখ্যা তখন আমরা পাই

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0\ , & m < n \\ \dfrac{m!\, \Gamma(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2})}{2^n (m-n)!\, \Gamma(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2})}\ , & m-n \geq 0 \text{ এবং জোড়} \\ 0\ , & m-n > 0 \text{ এবং বিজোড়} \end{cases} \quad (৩১)$$

যদি $m = n$ হয় তখন উক্ত ফলটি দাঁড়ায়

$$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\, dx = \frac{1}{2^n} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}$$

অথবা $$\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\, dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (৩২)$$

যেখানে 'গামা' ফাংশনের মানগুলি ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

৭.১০ লেজেন্ডার সহযোগী বহুপদী

গোলকীয় স্থানাংকে লাপ্লাসের সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে একটি সাধারণ অন্তরক সমীকরণ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0 \qquad (৬৩)$$

এর সমাধানের উপর লাপ্লাসের সমীকরণের সমাধান নির্ভর করে। যখন $m = 0$ তখন লেজেন্ডার সমীকরণ পাওয়া যায়। সমীকরণ (৬৩) কে সহযোগী লেজেন্ডার সমীকরণ বলে। আবার লেজেন্ডার সমীকরণ থেকেও উক্ত সমীকরণ (৬৩) পাওয়া যায়। কারণ লেজেন্ডার সমীকরণ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0 \qquad (৬৪)$$

কে x এর সাপেক্ষে m পদ পর্যন্ত অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}-2x(m+1)\frac{du}{dx}+(n-m)(n+m+1)u=0 \qquad (৬৫)$$

যেখানে $$u=\frac{d^my}{dx^m} \qquad (৬৬)$$

যেহেতু $P_n(x)$ হলো লেজেন্ডার সমীকরণ (৬৪) এর সমাধান, কাজেই

$$u=\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \qquad (৬৭)$$

এখন (৬৫) তে যদি আমরা ধরে নিই যে

$$w=u(1-x^2)^{m/2} \qquad (৬৮)$$

তাহলে আমরা পাই

$$(1-x^2)\frac{d^2w}{dx^2}-2x\frac{dw}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]w=0 \qquad (৬৯)$$

যা সমীকরণ (৬৩) এর একই রূপ।

এটি থেকে আমরা বলতে পারি, সহযোগী লেজেন্ডার সমীকরণ (৬৯) এর সমাধান হলো

$$w=(1-x^2)^{m/2}u=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \qquad (৭০)$$

গণিতের ভাষায় w এর এই মানকে সহযোগী লেজেন্ডার বহুপদী বলে থাকে $P_n^m(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ফলে, যেখানে $P_n(x)$ লেজেন্ডার বহুপদী, সেখানে

$$P_n^m(x) = y(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \qquad (৭১)$$

এখানে বলার অপেক্ষা রাখেনা যে, যখন $m > n$ তখন

$$P_n^m(x) = 0 \qquad (৭২)$$

রড্রিগ সূত্র (১৭) থেকে সহজেই নিম্নোক্ত সূত্রটি পাওয়া যায় :

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2-1)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n \qquad (৭৩)$$

যদি $P_n(x)$ এবং $Q_n(x)$ লেজেন্ডার সমীকরণের দুটি সমাধান হয় তবে (৬৮) থেকে পাওয়া যায়

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \qquad (৭৪)$$

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x) \qquad (৭৫)$$

যা হলো সহযোগী লেজেন্ডার সমীকরণের সমাধান।

৭.১১ উল্লম্বিকতা

সমীকরণ (৬৫) কে $(1-x^2)^m$ দ্বারা গুণ করে এবং তার ফলকে নিম্নোক্তভাবে লিখে আমরা পাই

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m+1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_n(x)\right]$$

$$= -\left[K - m(m+1)\right](1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

যেখানে $K = n(n+1)$; যদি $m+1 = m'$ লেখা যায় তবে

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{m'} \frac{d^{m'}}{dx^{m'}} P_n(x)\right]$$

$$= -\left[K - m'(m'-1)\right](1-x^2)^{m'-1} \frac{d^{m'-1}}{dx^{m'-1}} P_n(x) \qquad (৭৬)$$

আমরা নিম্নোক্ত সম্পর্কটি অন্তর্ভুক্ত করব :

$$L_{n,r}^{m} = \int_{-1}^{1} P_n^m(x) P_n^m(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \frac{d^m}{dx^m} P_r(x)\, dx$$

এখন ডানপক্ষকে আংশিক সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$L_{n,r}^{m} = \left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_r(x) \frac{d^m}{dx^m} (1-x^2)^m \right]_{-1}^{1}$$

$$-\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_r \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n\right] dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)\right] dx$$

$$= [n(n+1) - m(m-1)] \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_n \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_r\, dx$$

[যেখানে (৭৬) ব্যবহার করা হয়েছে]

$$= (n+m)(n-m+1) L_{n,r}^{m-1}$$

পৌনঃপুনিকভাবে অগ্রসর হলে, আমরা চূড়ান্ত সূত্র হিসেবে নিম্নোক্ত সূত্রটি পেয়ে যাই :

$$L_{n,r}^{m} = (n+m)(n+m-1)\cdots\cdots(n+1)\cdots\cdots(n-m+1) L_{n,r}^{0}$$

$$= \frac{(m+n)!}{n!} \frac{n!}{(n-m)!} L_{n,r}^{0}$$

$$L_{n,r}^{m} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} L_{n,r}^{0} \qquad (৭৭)$$

কিন্তু আমরা নিম্নোক্ত ফলগুলি ইতঃমধ্যে পেয়েছি :

$$L^0_{n,\,r}=\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_r(x)\,dx=\begin{cases}0 & ,\ n\neq r\\ \dfrac{2}{2n+1}, & n=r\end{cases}$$

কাজেই (৭৭) হতে পাওয়া

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_r^m(x)\,dx=\begin{cases}0, & n\neq r\\ \dfrac{2}{2n+1}\,\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n=r\end{cases}\tag{৭৮}$$

ফলাফল (৭৮) অনুসারে এর দৈর্ঘ্য (norm) হলো

$$\int_{-1}^{1}[P_n^m(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\tag{৭৯}$$

৭.১২ মাফির সূত্র

উৎস ফাংশন (২৩) হতে আমরা পাই

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n\frac{d^r}{dx^r}\,P_n(x)=\frac{d^r}{dx^r}\,(1-2xh+h^2)^{-1/2}$$

$$=2^rh^r\,\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,(1-2xh+h^2)^{-r-1/2}$$

এতে $x=1$ বসিয়ে আমরা দেখতে পাই যে

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(1)h^n=2^r\,\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,h^r(1-h)^{-(2r+1)}$$

$$=2^r\,\frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,h^r\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+2r+s)}{\Gamma(1+2r)\,s!}\,h^s$$

যেখানে $P_n^{(r)}(x)=\dfrac{d^r}{dx^r}\,P_n(x)$

এখন h^n এর সহগ সমান করে আমরা পাই,

$P_n^{(r)}(1)=0$, যদি $r>n$ হয়। কারণ $P_n(x)$ হলো n মাত্রার x এর বহুপদী

এবং $$P_n^{(r)}(1) = 2^n \frac{\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(1+n+r)}{\Gamma(1+2r)(n-r)!}$$

গামা ফাংশনের অনুরূপ সূত্র থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{2^n \Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1+2r)} = \frac{1}{2^r r!} = \frac{1}{(1)_r 2^r}$$

এবং $$\frac{\Gamma(1+n+r)}{(n-r)!} = (-1)^r (n+1)_r (-n)_r$$

তাহলে পাওয়া যায় নিচের ফল :

$$P_n^{(r)}(1) = (-1)^r \frac{(n+1)_r (-n)_r}{(1)_r 2r} \tag{৮০}$$

এখন টেলরের উপপাদ্য হতে আমরা পাই

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r-1)^r}{r!} P_n^{(r)}(1)$$

এতে (৮০) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)_r (n+1)_r}{(1)_r r!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^r$$

অথবা $$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1\,;\, 1\,; \frac{1-x}{2}\right) \tag{৮১}$$

যা মার্ফির সূত্র নামে অভিহিত করা হয়েছে।

৭.১৩ নয়ম্যানের (Neumann) সূত্র

আমরা নিম্নোক্ত সমাকলনটি বিবেচনা করব :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(y)\,dy}{x-y}$$

যেখানে $|x| > 1$ এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। উক্ত সমাকলনের হরকে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তার করে সমাকলনের মানের জন্য আমরা পাই

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{x^{s+1}} \int_{-1}^{1} y^s P_n(y)\, dy$$

সিরিজটি। এখন (৬১) অনুসারে উক্ত সিরিজের সমাকলনের মান শূন্য, যদি $s < n$ হয়। অর্থাৎ

$$\int_{-1}^{1} y^s P_n(y)\, dy = 0\,, \quad s \leqslant n$$

এবং যদি $s = n + 2r$ হয়, যেখানে r ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, তাহলে উক্ত সিরিজকে নিম্নোক্তভাবে লেখা যায় :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1+2r}} \int_{-1}^{1} y^{n+2r} P_n(y) dy$$

$$= \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+2r)!\, \Gamma(r+\frac{1}{2})}{2^n (2r)!\, \Gamma(n+r+\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

গামা ফাংশনের অনুরূপ সূত্র থেকে আমরা পাই

$$\frac{(n+2r)!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)}{2^n(2r)!} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+r\right)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1+r\right)}{r!}$$

ফলে উক্ত সিরিজটি দাঁড়ায়

$$\frac{1}{x^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+r\right)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1+r\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}+r\right) r!} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) x^{n+1}}\ {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, \frac{n}{2}+1;\, n+\frac{3}{2}\,;\, \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)}{2^n \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \quad {}_2F_1\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, \frac{n}{2}+1; n+\frac{3}{2}; \frac{1}{x^2}\right)$$

(৮২)

যেহেতু $$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(n+1)}{2^n \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

এখন (১৯) থেকে যেভাবে $Q_n(x)$ এর সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে সে থেকে (৮২)-তে নজর দিলে দেখতে পাই যে এই সিরিজটি হলো $2Q_n(x)$। কাজেই $|x| > 1$ হলে

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(y)\, dy}{x-y} \qquad (৮৩)$$

যা 'নিয়ম্যানের' সূত্র নামে পরিচিত

প্রশ্নমালা

১। দেখাও যে

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx = 0, \; n = 1, 2, 3, \cdots \cdots$$

২। দেখাও যে

$$\int_{-1}^{1} x\, P_n(x)\, P_{n-1}(x)\, dx = \frac{2n}{4n^2-1}$$

৩। প্রমাণ কর যে

$$\frac{d\, P_{n+1}(x)}{dx} - \frac{d\, P_{n-1}(x)}{dx} = (2n+1)\, P_n(x)$$

৪। রড্রিগের সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\ P_n(x)\ dx = 0$$

৫। দেখাও যে

$$x^2 = \frac{2}{3} P_2(x) + \frac{1}{3} P_0(x)$$

$$x^3 = \frac{2}{5} P_3(x) + \frac{3}{5} P_1(x)$$

৬। দেখাও যে

$P_n(0) = 0$, n বিজোড় সংখ্যা এবং

$$P_n(0) = \frac{(-1)^{n/2} n!}{2^n \left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2}$$

৭। প্রমাণ কর যে

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} P_n(x) = \frac{1}{2} \log\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}$$

৮। যদি $\quad R = \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}\right\}$

হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\ R\{f(x)\}\ dx = -n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)\ f(x)\ dx$$

যখন $x = \pm 1$ বিন্দুতে $f(x)$ এবং $f'(x)$ সসীম।

প্রমাণ কর যে, যখন $n \geqslant 1$,

$$\int_{-}^{1} \log\ (1-x)\ P_n(x)\ dx = -\frac{2}{n(n+1)}$$

৯। প্রমাণ কর :

(ক) $$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{2}}{2n+1}$$

(খ) $$\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,dx}{(1-2hx+h^2)^{3/2}} = \frac{2h^n}{1-h^2}$$

১০। দেখাও যে

$$P_n(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n, -n; 1; \frac{x-1}{x+1}\right)$$

অষ্টম অধ্যায়

হারমাইট এবং লেগুয়্যার বহুপদী
(Hermite and Laguerre Polynomials)

প্রথম পর্ব

৮.১ হারমাইট বহুপদী

n এর পূর্ণমানের জন্য এবং যখন x বাস্তব রাশি তখন হারমাইট বহুপদী $H_n(x)$ এর সংজ্ঞা হলো

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n \qquad (১)$$

যদি ধরে নেয়া হয় যে,

$$f(x, t)=e^{2tx-t^2}=e^{x^2}e^{-(x-t)^2}$$

তাহলে টেইলরের উপপাদ্য থেকে আমরা পাই

$$H_n(x)=\left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\right)_{t=0}=e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}$$

কিন্তু আমরা দেখতে পাই যে

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

কাজেই আমরা উপরিউক্ত সম্পর্কগুলি থেকে নিচের সূত্রটি নির্ণয় করতে পারি।

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \qquad (২)$$

যা থেকে হারমাইট বহুপদীগুলি নির্ণয় করা যায়।

সূত্র (২) থেকে সরাসরি নিম্নের বহুপদীগুলি নির্ণয় করা যাবে :

$$H_0(x)=1$$

$$H_1(x)=2x$$

$$H_2(x)=4x^2-2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

সাধারণভাবে হারমাইট বহুপদীর সংজ্ঞা হলো

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-3)(n-4)}{2!}(2x)^{n-4} + \cdots \tag{৩}$$

অথবা অধিজ্যামিতিক ফাংশনের সাহায্যে একে লেখা যায়

$$H_n(x) = (2x)^n \; {}_2F_0\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n}{2}, -\frac{1}{x^2}\right)$$

আকারে।

৮.২ পৌনঃপুনিক সূত্র

সংজ্ঞা (১) থেকে হারমাইট বহুপদীর পৌনঃপুনিক সূত্র নির্ণয় করা যায়। যদি (১) এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করা যায় তাহলে আমরা পাই

$$2te^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n$$

অথবা
$$2.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)\, t^n}{n!}$$

এখন t^n এর সহগ উভয় পক্ষ থেকে সমান করে পাওয়া যায়

$$2n\, H_{n-1}(x) = H_n'(x) \tag{৪}$$

আবার যদি (১) এর উভয় পক্ষকে t এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করা যায় তবে আমরা পাই

$$2(x-t)e^{2tx-t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$$

যা থেকে পাওয়া যায়

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1}$$

এখন t^n এর সহগ উভয় পক্ষ থেকে সমান করে পাওয়া যায়

$$2x\ H_n(x) = 2n\ H_{n-1}(x) + H_{n+1}(x) \tag{৫}$$

সমীকরণ (৪) এবং (৫) থেকে $2nH_{n-1}(x)$ কে অপসারণ করে পাওয়া যায়

$$H_n'(x) = 2x\ H_n(x) - H_{n+1}(x) \tag{৬}$$

এখন (৬) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$H_n''(x) = 2x\ H_n'(x) + 2\ H_n(x) - H_{n+1}'(x)$$

এবং সমীকরণ (৪) থেকে পাওয়া যায়

$$H_{n+1}'(x) = 2(n+1)\ H_n(x)$$

ফলে নিম্নের সূত্রটি আমরা পেয়ে যাই :

$$H_n''(x) - 2x\ H_n'(x) + 2n\ H_n(x) = 0 \tag{৭}$$

সমীকরণ (৭) এ যদি আমরা ধরে নিই যে, $y = H_n(x)$ তাহলে নিম্নের অন্তরকরণ সমীকরণটি পাওয়া যায় :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{৮}$$

৮.৩ হারমাইট অন্তরক সমীকরণ

পূর্বেকার অনুচ্ছেদে আমরা দেখলাম যে $y = H_n(x)$ হলো সমীকরণ (৮) এর সমাধান। কাজেই হারমাইট অন্তরক সমীকরণ হলো, যখন $n = \nu$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2\nu y = 0 \tag{৯}$$

মনে করি সমীকরণ (৯) এর সমাধান হবে

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{c+r} \tag{১০}$$

এখন y এর মান (১০) থেকে (৯) তে স্থাপন করে এবং x^{c+r} এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে আমরা নিচের পৌনঃপুনিক সম্পর্কটি পাই :

$$a_{r+2} = \frac{2(r+c-v)}{(r+c+2)(r+c+1)} a_r \qquad (১১)$$

আবার x^{c-2} এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে সূচক সমীকরণ

$$c(c-1) = 0 \qquad (১২)$$

পাওয়া যায়। এ থেকে আমরা পাই

$$c = 0, \quad c = 1 \qquad (১৩)$$

যখন $c = 0$ তখন পৌনঃপুনিক সম্পর্ক (১১) দাঁড়ায়

$$a_{r+2} = \frac{2(r+1-v)}{(r+3)(r+2)} a_r \qquad (১৪)$$

যা থেকে একটি সমাধান পাওয়া যায় :

$$y_0(x) = a_0 \left(1 - \frac{2v}{2!} x^2 + \frac{2^2 v(v-2)}{4!} x^4 - \frac{2^3 v(v-2)(v-4)}{6!} x^6 + \cdots \right) \qquad (১৫)$$

যেখানে a_0 একটি ধ্রুবক।

অনুরূপভাবে যখন $c = 1$ তখন আমরা নিচের পৌনঃপুনিক সম্পর্ক পাই :

$$a_{r+2} = \frac{2(r+1-v)}{(r+3)(r+2)} a_r \qquad (১৬)$$

যা থেকে অপর সমাধান $y_1(x)$ পাওয়া যায় যা হলো

$$y_1(x) = a_1 x \left(1 - \frac{2(v-1)}{3!} x^2 + \frac{2^2(v-1)(v-3)}{5!} x^4 + \cdots \right) \qquad (১৭)$$

যেখানে a_1 যে কোনো ধ্রুবক। ফলে সমীকরণ (৯) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) \qquad (১৮)$$

ধ্রুবক v এর সাধারণ মানের জন্য দুটি সিরিজ $y_0(x)$ এবং $y_1(x)$ অসীম। সমীকরণ (১১) এবং (১৬) থেকে আমরা পাই

$$a_{r+2} \sim \frac{2}{r} a_r \quad \text{যখন } r \to \infty \qquad (১৯)$$

যদি আমরা শক্তি সিরিজ হিসেবে লিখি

$$e^{x^2} = b_0 + b_2x^2 + \cdots\cdots + b_rx^r + b_{r+2}x^{r+2} + \cdots\cdots$$

তাহলে আমরা পাই

$$b_{r+2} \sim \frac{2}{r} b_r, \quad \text{যখন } r \to \infty \tag{২০}$$

এখন আমরা মনে করি

$$\frac{a_N}{b_N} = k$$

যেখানে k কোনো ধ্রুবক যার মান বড় বা ছোট। তাহলে (১৯) এবং (২০) থেকে পাওয়া যায়, যখন N এর মান খুব বড়,

$$\frac{a_{N+2m}}{b_{N+2m}} \sim k$$

অন্যকথায় বলা যায় যে, সিরিজ $y_0(x)$ এবং $y_1(x)$ এর উচ্চ পদগুলি e^{x^2} এর উচ্চ পদগুলি থেকে k_1 এবং k_2 এর গুণিতক হিসেবে পৃথক হয়। ফলে $|x|$ এর বড় মানের জন্য পাওয়া যায়

$$y_0(x) \sim k_1 e^{x^2} \quad \text{এবং} \quad y_1(x) \sim k_2 e^{x^2}$$

যেহেতু এ ধরনের বড় মানের জন্য নিম্ন পদগুলি গুরুত্বপূর্ণ নয়।

কোয়ান্টাম মেকানিক্সে আমরা হারমাইট অন্তরক সমীকরণের এমন সমাধানের প্রয়োজনীয়তা অনুভব করি যা $|x| \to \infty$ এর জন্য $e^{x^2/2}$ এর চেয়ে বেশি দ্রুত অসীম হয় না। এই বিবেচনা থেকে আমরা দেখতে পাই যে, এ ধরনের সমাধান পাওয়া সম্ভব কেবল যদি $y_0(x)$ বা $y_1(x)$ সাধারণ বহুপদী হয়। সমাধান (১৬) এবং (১৭) থেকে এটি পরিষ্কার যে, এই বিবেচনা সম্ভব যদি ν ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়। উদাহরণস্বরূপ যদি $\nu = n$ হয়, যেখানে n জোড় পূর্ণ সংখ্যা তখন আমরা সমাধান নিম্ন আকারে পাই :

$$y(x) = aH_n(x) \tag{২১}$$

যেখানে a হলো ধ্রুবক, যদি $a_1 = 0$ হয় এবং

$$a_0 = (-1)^{\frac{1}{2}n} \frac{n!}{(\frac{1}{2}n)!} a$$

হয়।

অনুরূপভাবে, যদি n একটি বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে সমাধান হবে (২১), যদি $a_0 = 0$ হয় এবং

$$a_1 = (-1)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} \frac{2n!}{(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2})!} \; a$$

হয়।

অতএব কেবল ν ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা n হলে হারমাইট অন্তরক সমীকরণের সমাধান পাওয়া যাবে যা $e^{x^2/2}$ এর চেয়ে অধিক দ্রুত অসীম হবে না যেখানে $|x| \to \infty$। যখন এই শর্ত পূরণ করে তখন হারমাইট অন্তরক সমীকরণের কাঙ্খিত সমাধান হবে (২১)।

৮.৪ হারমাইট ফাংশন

হারমাইট অন্তরক সমীকরণের নিকটতম সম্পর্কযুক্ত একটি সমীকরণ হলো

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (p^2 - x^2)\psi = 0 \tag{২২}$$

যদি নির্ভরশীল চলক $\psi(x)$ কে আমরা অন্য চলক y-তে রূপান্তর করি, যেখানে

$$\psi(x) = e^{-x^2/2}\, y \tag{২৩}$$

এবং $p = 1 + 2\nu$ বসিয়ে এটি সহজেই দেখা যায় যে চলক y হারমাইট অন্তরকরণ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। কাজেই সমীকরণ (২২) এবং সাধারণ সমাধান হবে $y_0(x)$ এবং $y_1(x)$ যা (১৫) এবং (১৭) তে নির্ণয় করা হয়েছে।

উপরিউক্ত যুক্তি মোতাবেক সমীকরণ (২২) এর সমাধান পাওয়া যাবে, যা $|x| \to \infty$ এর জন্য শূন্যের দিকে ধাবিত হবে, যদি কেবল $p = 1 + 2n$ হয়, যেখানে n হলো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। ধ্রুবক p এর এই শর্তে (২২) এর সমাধানগুলি হবে ফাংশন $\psi_n(x)$ এর ধ্রুবক গুণিতক, যেখানে

$$\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{২৪}$$

এবং $H_n(x)$ হলো n মাত্রার হারমাইট বহুপদী। এখানে ফাংশন $\psi_n(x)$ কে n ক্রমের হারমাইট ফাংশন বলে।

হারমাইট ফাংশন $\psi_n(x)$ এর জন্য পৌনঃপুনিক সম্পর্কগুলি হারমাইট বহুপদী $H_n(x)$ এর অনুসারেই পাওয়া যাবে। পৌনঃপুনিক সম্পর্ক (৪) থেকে (৭)-এ $H_n(x)$ এর মান (২৪) থেকে স্থাপন করে আমরা $\psi_n(x)$ এর জন্য নিম্নোক্ত পৌনঃপুনিক সম্পর্কগুলি পাই। যেমন (৪) থেকে পাওয়া যায়

$$2n\psi_{n-1}(x) = x\psi_n(x) + \psi'_n(x) \tag{২৫}$$

সম্পর্ক (৫) থেকে আমরা পাই

$$2x\psi_n(x) = 2n\ \psi_{n-1}(x) + \psi_{n+1}(x) \tag{২৬}$$

এখন (২৫) এবং (২৬) থেকে $2n\ \psi_{n-1}(x)$ কে অপসারণ করলে দাঁড়ায় নিচের পৌনঃপুনিক সম্পর্ক

$$\psi_n'(x) = x\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x) \tag{২৭}$$

সমীকরণ (৭)-এ (২৪) থেকে $H_n(x)$ এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\psi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\ \psi_n(n) = 0 \tag{২৮}$$

হারমাইট ফাংশনের গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম নিহিত আছে এর দুটি ফাংশনের গুণফলের সমাকলনের মধ্যে। এই সম্পর্কটি নির্ণয়ের জন্য আমাদের প্রথম দেখার বিষয় হলো যে $\psi_n(x)$ সমীকরণ (২৮) কে সিদ্ধ করে। কাজেই অনুরূপ আর একটি ফাংশন $\psi_m(x)$ আমরা নির্ণয় করতে পারি যা সমীকরণ

$$\psi_m''(x) + (2m + 1 - x^2)\ \psi_m(x) = 0 \tag{২৯}$$

কে সিদ্ধ করে।

এখন (২৮) কে $\psi_m(x)$ এবং (২৯) কে $\psi_n(x)$ দ্বারা গুণ করে যা ফল হয় তা পরস্পর থেকে বিয়োগ করে এবং $(-\infty, \infty)$ এর উপর সমাকলন করার পর পাওয়া যায়

$$2(m-n)\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\ \psi_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_m(x)\ \psi_n''(x) - \psi_n(x)\ \psi_m''(x)dx \tag{৩০}$$

এর ডান পক্ষকে আংশিক সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\Big[\ \psi_m(x)\ \psi_n'(x) - \psi_n(x)\ \psi_m'(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\ \psi_m'(x)\ \psi_n'(x) - \psi_n'(x)\psi_m'(x)\Big]dx \tag{৩১}$$

কিন্তু উল্লেখ্য যে, n এর সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা মানের জন্য আমরা পাই

$$\psi_n(x) \to 0, \quad \text{যখন } |x| \to \infty$$

কাজেই (৩১) এর মান শূন্য। ফলে যদি আমরা ধরে নেই যে

$$I_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\ \psi_n(x)\ dx \tag{৩২}$$

তাহলে (৩০) থেকে আমরা পাই

$$I_{m,n}=0, \text{ যখন } m \neq n \tag{৩৩}$$

বিশেষ ক্ষেত্রে আমরা দেখি যে, যখন $m=n-1$ এবং $n=n+1$ তখন, (৩৩) থেকে পাওয়া যায়

$$I_{n-1,n+1}=0 \tag{৩৪}$$

এবং (২৬) থেকে আমরা নিচের ফলটি পেয়ে যাই :

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x\psi_n(x)\ \psi_{n-1}(x)dx = 2n\ I_{n-1,\,n-1} \tag{৩৫}$$

এখন (২) থেকে $H_n(x)$ এর মান (২৪)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\psi_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\ \frac{d^n}{dx^n}\ (e^{-x^2}) \tag{৩৬}$$

(৩৬) থেকে $\psi_n(x)$ এর মান (৩৫)-এ ব্যবহার করে আমরা পাই

$$-\int_{-\infty}^{\infty} 2x\, e^{x^2}\ \frac{d^n}{dx^2}\,(e^{-x^2})\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,(e^{-x^2})\ dx \tag{৩৭}$$

একে আংশিক সমাকলন করে দেখা যায় যে, (৩৭) এর মান হবে

$$I_{n,\,n}+I_{n+1,\,n-1}=I_{n,\,n} \tag{৩৮}$$

যেখানে (৩৪) অনুসারে $I_{n+1,\,n-1}=0$

কাজেই (৩৬) থেকে পাওয়া যায়

$$I_{n,\,n}=2n\,I_{n-1,\,n-1} \tag{৩৯}$$

এই প্রক্রিয়া পুনঃপুন n পদ পর্যন্ত ব্যবহার করে অবশেষে পাওয়া যায়

$$I_{n,\,n}=2^n n!\ \sqrt{\pi} \tag{৪০}$$

যেখানে $$I_{0,\,0}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

সমীকরণ (৩৯) এবং (৪০) একত্রিত করে লেখা যায়

$$I_{m,n} = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{mn} \tag{৪১}$$

যেখানে δ_{mn} হলো ক্রনেকার ডেল্টা যার মান

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

হারমাইট ফাংশনের জন্য প্রতিষ্ঠিত পৌনঃপুনিক সূত্রে উপরোক্ত ফল ব্যবহার করে অনেক কঠিন সমাকলনের মান নির্ণয় করা যায়। উদাহরণস্বরূপ (২৬) থেকে পাওয়া যায়

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = n\,I_{m,n-1} + \tfrac{1}{2} I_{m,n+1} = 0,\ m \neq n \pm 1 \tag{৪২}$$

এবং আরো পাওয়া যায়,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\psi_n(x)\,\psi_{n+1}(x)\,dx = 2^n (n+1)!\,\sqrt{\pi} \tag{৪৩}$$

অনুরূপভাবে (২৬)-এ (৪১) থেকে (৪৩) পর্যন্ত সমীকরণগুলি প্রয়োগ করে নিচের ফলগুলি পাওয়া যায় :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\,\psi_n'(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ যখন} & 1 \\ 2^{n-1} n!\,\sqrt{\pi}, & m = n-1 \\ -2^n (n+1)!\,\sqrt{\pi}, & m = n+1 \end{cases} \tag{৪৪}$$

৮.৫ তরঙ্গ মেকানিক্সে হারমাইট ফাংশনের উদ্ভব

হার্মোনিক কম্পাঙ্কের তরঙ্গ মেকানিক্সের ক্ষেত্রে হারমাইট ফাংশনের উদ্ভব হয়। যদিও এটি সহজ মেকানিক্যাল পদ্ধতি তবুও এর ধর্মগুলি বিশ্লেষণ করা একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। কারণ আলোকের কোয়ান্টাম তত্ত্বে এই পদ্ধতির প্রয়োগ হয়ে থাকে।

m ভরবিশিষ্ট একটি হার্মোনিক কম্পাঙ্কের ক্ষেত্রে শ্রুডিঙ্গার (Schrodinger) তরঙ্গ সমীকরণ হলো

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - 2\pi^2 m \nu^2 x^2\right)\psi = 0 \tag{৪৫}$$

যেখানে ν হলো কম্পাংক, E হলো কম্পাংকের মোট শক্তি এবং h হলো প্ল্যাঙ্কের ধ্রুবক। সমস্যাটি হলো তরঙ্গ ফাংশন ψ নির্ণয় করা, যেখানে

(i) $\psi \to 0$, যখন $|x| \to \infty$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$

এই সমস্যা সমাধানের জন্য আমরা মনে করি

$$x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{m\nu}}\, z \qquad (৪৬)$$

তাহলে সমীকরণ (৪৫) দাঁড়ায়

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\frac{2E}{h\nu} - z^2\right)\psi = 0 \qquad (৪৭)$$

এবং শর্ত (i) এবং (ii) দাঁড়ায়

(iii) $\psi \to 0$, যখন $|z| \to \infty$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dz = 2\pi\sqrt{\frac{m\nu}{h}}$

হারমাইট ফাংশনের ক্ষেত্রে যে যুক্তিগুলি প্রদর্শন করা হয়েছে সে মোতাবেক সমীকরণ (৪৭) এর সমাধান হবে ψ যদি কেবল $2E/h\nu$ এর মান $1+2n$ হয়, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং তা শর্ত (iv) পূরণ করে। অন্যকথায় বলা যায়, এ ধরনের সমাধান হবে তরঙ্গ ফাংশন ψ যা ঐ প্রক্রিয়ার স্থায়ী অবস্থা নির্দেশ করে। এটি পাওয়া যাবে যদি কেবল

$$E = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) h\nu \qquad (৪৮)$$

হয় যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। যখন এই শর্তগুলি বলবৎ হবে তখন অনুচ্ছেদ ৮.৪ অনুসারে (৪৭) এর সমাধান হবে

$$\psi = A\psi_n(z) \qquad (৪৯)$$

যেখানে A একটি ধ্রুবক। এখন শর্ত (iv) প্রয়োগ করে এবং (৪০) ব্যবহার করে আমরা দেখতে পাই যে

$$A = \sqrt{\left(\frac{4\pi\, m\nu}{h} \cdot \frac{1}{2^n n!}\right)}$$

কাজেই কোনো শক্তি $E = (n + \frac{1}{2}) h\nu$ এর সংশ্লিষ্ট তরঙ্গ ফাংশন হবে

$$\psi_n = \sqrt{\left(\frac{4\pi m\nu}{h}\right)} \frac{\psi_n(z)}{2^{n/2}(n!)^{1/2}} \tag{৫০}$$

যেখানে $$z = 2\pi \sqrt{\frac{m\nu}{h}}\, x$$

কোয়ান্টাম তত্ত্বে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি $(n \mid x \mid p)$ হার্মোনিক কম্পাঙ্কের ক্ষেত্রে একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। উক্ত ভুক্তির সংজ্ঞা নিচে দেয়া হলো

$$(n \mid x \mid p) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\psi_n(x)\,\psi_p(x)\,dx$$

যা চলক z এর মাধ্যমে লেখা যায় এভাবে :

$$(n \mid x \mid p) = \frac{h}{4\pi^2 m\nu} \int_{-\infty}^{\infty} z\,\psi_n(z)\,\psi_p(z)\,dz \tag{৫১}$$

এখন (৫০) থেকে ψ_n এর মান (৫১)-তে বসিয়ে আমরা পাই

$$(n \mid x \mid p) = \frac{1}{B\pi}\sqrt{\frac{h}{4\pi m\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} z\,\psi_n(z)\,\psi_p(z)\,dz \tag{৫২}$$

যেখানে $B = \sqrt{2^{n+p}\,n!\,p!}$

সমীকরণ (৪২) এবং (৪৩) অনুসারে (৫২) থেকে পাওয়া যায়

$$(n \mid x \mid p) = 0, \quad \text{যখন } p \neq n \pm 1, \tag{৫৩}$$

$$(n \mid x \mid n+1) = \sqrt{\frac{(n+1)h}{8\pi^2 m\nu}} \tag{৫৪}$$

$$(n \mid x \mid n-1) = \sqrt{\frac{nh}{8\pi^2 m\nu}} \tag{৫৫}$$

দ্বিতীয় পর্ব

৮.৬ লেগুয়ার বহুপদী

যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং x একটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি তখন লেগুয়ার বহুপদী $L_n(x)$ এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$$\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n \qquad (৫৬)$$

বামপক্ষের শক্তি-ফাংশনকে বিস্তার করলে আমরা পাই

$$(1-t)^{-1}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r t^r}{r!(1-t)^{r+1}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(r+1)_s}{r!\,s!}x^r t^{r+s}$$

এই বিস্তারে t^n এর সহগ হলো

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r(r+1)_{n-r}}{r!\,(n-r)!}x^r$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r}{(r!)^2}x^r$$

যেখানে $\quad (r+1)_{n-r}=\frac{n!}{r!}\;\frac{(-1)^r}{(n-r)!}=\frac{(-n)_r}{n!}$

কাজেই (৫৬) থেকে উভয় দিকের t^n এর সহগ সমান করে আমরা পাই

$$\frac{L_n(x)}{n!}=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-n)_r}{r!\,r!}x^r={}_1F_1(-n,\,1\,;\,x)$$

অথবা $\qquad L_n(x)=n!\;{}_1F_1(-n,1\,;\,x) \qquad (৫৭)$

যেখানে $r!=(1)_r$ এবং ${}_1F_1(-n\,,\;1\,;\;x)$ হলো প্রবহ অধিজ্যামিতিক ফাংশন। এটি লক্ষণীয় বিষয় যে, লেগুয়ার বহুপদী $L_n(x)$ হলো চলক x এর n মাত্রার বহুপদী এবং x^n এর সহগ হলো $(-1)^n$ ।

প্রবহ অধিজ্যামিতিক ফাংশনকে অন্যভাবে প্রকাশ করে (৫৭) থেকে $L_n(x)$ এর কার্যকরী সূত্র নির্ণয় করা যায়। দুটি ফাংশনের গুণফলের n-তম জাতক নির্ণয়ের

জন্য লিবনিজ উপপাদ্য ব্যবহার করে পাওয়া যায় :

$$e^{x} D^{n}(x^{n} e^{-x}) = e^{x} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \frac{(-n)_{r}}{r!} (D^{n-r} x^{n}) (D^{r} e^{-x})$$

যেখানে D হলো অনুঘটক $\frac{d}{dx}$ । নিচের সম্পর্কগুলি যথা :

$$e^{x} D^{r}(e^{-x}) = (-1)^{r}, \quad D^{n-r} x^{n} = \frac{n!\, x^{r}}{r!}$$

ব্যবহার করে আমরা দেখতে পাই যে

$$e^{x} D^{n}(x^{n} e^{-x}) = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n)_{r}}{(r!)^{2}} x^{r} \tag{৫৮}$$

কাজেই (৫৭)-তে (৫৮) ব্যবহার করে পাওয়া যায়

$$L_{n}(x) = e^{x} \frac{d^{n}}{dx^{n}} (x^{n} e^{-x}) \tag{৫৯}$$

সমীকরণ (৫৯) থেকে সরাসরি n এর বিভিন্ন মানের লেগুয়ার বহুপদী নির্ণয় করা যায়। তাদের প্রথম পাঁচটি নির্ণয় করা হলো, যেখানে

$L_0(x) = 1,$ $\qquad L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$

$L_1(x) = 1 - x,$ $\qquad L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4$

$L_2(x) = 2 - 4x + x^2$

সমীকরণ (৫৯) থেকে এটি প্রমাণ করা যায় যে, ফাংশন

$$\phi_{n}(x) = \frac{1}{n!} e^{-x/2} L_{n}(x) \tag{৬০}$$

একগুচ্ছ অর্থনরমাল (orthonormal) ফাংশন। আমরা (৫৯) থেকে পাই

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{m} L_{n}(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x^{m} \frac{d^{n}}{dx^{n}}(x^{n} e^{-x})\, dx$$

এর ডান পক্ষকে m-তম পদ পর্যন্ত আংশিক সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_0^\infty e^{-x} x^m L_n(x)dx = (-1)^m m! \int_0^\infty \left(\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\right)(x^n e^{-x})\, dx$$

$$= 0, \text{ যখন } n > m$$

যেহেতু $L_n(x)$ হলো x চলকবিশিষ্ট m মাত্রার বহুপদী, কাজেই উপরোক্ত ফল থেকে পাওয়া যায়

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x)\, L_n(x)dx = 0, \text{ যখন } m \neq n \tag{৬১}$$

যেহেতু বহুপদী $L_n(x)$ এর মাত্রার পদ হলো $(-1)^n x^n$, ফলে যখন $m = n$ তখন আমরা দেখতে পাই যে,

$$\int_0^\infty e^{-x}\{L_n(x)\}^2 dx = (-1)^n \int_0^\infty e^{-x} x^n L_n(x)dx$$

$$= \int_0^\infty n!\, x^n e^{-x}\, dx = (n!)^2 \tag{৬২}$$

এখন (৬১) এবং (৬২) কে একত্রিত করলে যে ফলটি পাওয়া যায় তা নিম্নরূপ :

$$\int_0^\infty \phi_m(x)\, \phi_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{৬৩}$$

যখন δ_{mn} হলো ক্রনেকার ডেল্টা। সমীকরণ (৬৩) থেকে দেখা যায় যে, ফাংশন $\phi_n(x)$ একটি অর্থনরমাল সেট গঠণ করে, যেখানে $n = 1, 2, 3, \cdots \cdots$ ।

৮.৭ পৌনঃপুনিক সূত্র

লেগুয়ার বহুপদীর পৌনঃপুনিক সূত্র (৫৬) থেকে সরাসরি নির্ণয় করা যায়। এখন (৫৬) এর উভয় পক্ষকে t এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করলে দাঁড়ায়

$$-\frac{x}{(1-t)^2} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)t^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)t^n}{n!}$$

অথবা

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)t^n}{n!}+(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)\,t^{n-1}}{(n-1)!}-(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)t^n}{n!}=0$$

এটি থেকে t^n এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে পাওয়া যায় নিচের পৌনঃপুনিক সম্পর্ক :

$$L_{n+1}(x)+(n-2n-1)L_n(x)+n^2\,L_{n-1}(x)=0 \tag{৬৪}$$

অনুরূপভাবে (৫৬) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়

$$t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)\,t^n}{n!}+(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n'(x)}{n!}\,t^n=0$$

এটি থেকে t^n এর সহগ শূন্যের সাথে সমান করে আমরা পাই নিচের পৌনঃপুনিক সম্পর্ক :

$$L_n'(x)-nL'_{n-1}(x)+nL_{n-1}(x)=0 \tag{৬৫}$$

আবার (৬৪) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করার পর n এর পরিবর্তে n + 1 লিখলে তা দাঁড়ায়

$$L''_{n+2}(x)+(x-2n-1)\,L''_{n+1}(x)+(n+1)^2\,L''_n(x)$$
$$+2L'_{n+1}(x)=0 \tag{৬৬}$$

এছাড়া (৬৫) থেকে পাওয়া যায়

$$L'_{n+1}(x)=(n+1)\{L'_n(x)-L_n(x)\}$$

এবং $$L''_{n+1}(x)=(n+1)\{L''_n(x)-L'_n(x)\}$$

অনুরূপভাবে $L''_{n+2}(x)$ এর মান নির্ণয় সহজেই করা যায়। উক্ত মানগুলি (৬৬) -তে বসালে আমরা নিচের পৌনঃপুনিক সূত্রটি পেয়ে যাই :

$$xL_n''(x)+(1-x)L'_n(x)+nL_n(x)=0 \tag{৬৭}$$

যদি $y=L_n(x)$ লেখা যায় তাহলে (৬৭) থেকে

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+\nu y=0 \tag{৬৮}$$

সমীকরণটি পাওয়া যায়, যেখানে ν হলো ধনাত্মকপূর্ণ সংখ্যা n ।

৮.৮ লেগুয়ার (Leguerre) অন্তরক সমীকরণ

সমীকরণ (৬৭) থেকে আমরা দেখতে পাই যে $y = AL_n(x)$ হলো এর একটি সমাধান। ফলে ফাংশন $y(x)$ এর অন্তরক সমীকরণ (৬৮) অর্থাৎ,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + \nu y = 0 \tag{৬৮}$$

পাওয়া যায়। এই সমীকরণকে লেগুয়ার অন্তরক সমীকরণ বলে, যেখানে ν হলো ধনাত্মকপূর্ণ সংখ্যা n।

সমীকরণ (৬৮) এর সমাধানের জন্য অধ্যায় ২ এর (৭২) নং সমীকরণ তুলনা করা যেতে পারে। যদি তার $\alpha = -\nu$ এবং $\gamma = 1$ হয় তবে উক্ত সমীকরণ থেকে লেগুয়ার সমীকরণ (৬৮) পাওয়া যায়। ফলে এর সমাধান হবে অধ্যায় ২ এর (৮৬ক) এবং (৮৬খ) মোতাবেক

$$y_1(x) = {}_1F_1(-\nu,\ 1\ ;\ x) \tag{৬৯}$$

এবং

$$y_2(x) = y_1(x)\ \log x + \sum_{r=1}^{\infty} a_r x^r \tag{৭০}$$

যেখানে সহগ a_r অধ্যায় ২ এর ৮৬খ থেকে পাওয়া যাবে। অতএব লেগুয়ার সমীকরণ (৬৮) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x) \tag{৭১}$$

যেখানে A এবং B যে কোনো ধ্রুবক।

আমরা এমন সমাধান খুঁজতে চাই যা $x = 0$ হলে সসীম থাকে। কাজেই সমাধান (৭১) থেকে এটি পরিষ্কার যে ধ্রুবক B অবশ্যই শূন্য হবে। অধিকন্তু, যদি $y_1(x)$ এর সিরিজ বিস্তারে x^r এর সহগ a_r হয় তবে আমরা দেখতে পাই যে

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} \sim \frac{1}{r}$$

এখন অনুচ্ছেদ ৮.৩ মোতাবেক আলোচনা সাপেক্ষে যদি ν পূর্ণ সংখ্যা না হয় তবে আমরা যে ফল পাই তা হলো

$$y_1(x) \sim e^x, \quad \text{যখন } x \to \infty \tag{৭২}$$

যদি আমরা এমন সমাধান পেতে চাই যা (৭২) এর চেয়ে অল্প দ্রুতিতে বাড়তে থাকবে, তখন অবশ্যই ν কে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হতে হবে। এ ক্ষেত্রে ফাংশন $y_1(x)$ বহুপদীতে রূপান্তরিত হবে। যদি আরো প্রয়োজন হয় যে, সমীকরণ (৬৮) এর সমাধান $x = 0$ তে সসীম হবে, তবে উক্ত সমাধান হবে নিম্ন আকারের :

$$y = AL_n(x) \tag{৭৩}$$

যেখানে A যে কোনো ধ্রুবক এবং $L_n(x)$ হলো n মাত্রার লেগুয়ার বহুপদী।

৮.৯ সহযোগী লেগুয়ার বহুপদী

যদি লেগুয়ার অন্তরক সমীকরণ (৬৮) কে x এর সাপেক্ষে m পদ পর্যন্ত অন্তরকরণ করা যায় তবে আমরা নিচের সমীকরণটি পাই :

$$x\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}\, y + (m+1-x)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\, y + (n-m)\frac{d^m y}{dx^m} = 0 \tag{৭৪}$$

যদি $L_n^m(x)$ এর সংজ্ঞা নিম্নোক্তভাবে দেয়া যায়,

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m}\, L_n(x), \quad (n \geq m) \tag{৭৫}$$

তাহলে আমরা দেখতে পাই যে, $L_n^m(x)$ নিচের অন্তরক সমীকরণকে সিদ্ধ করে :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (m+1-x)\frac{dy}{dx} + (n-m)\, y = 0 \tag{৭৬}$$

(৭৫) এর সংজ্ঞা অনুসারে $L_n^m(x)$ কে সহযোগী লেগুয়ার বহুপদী বলে। লেগুয়ার বহুপদী $L_n(x)$ এর সংজ্ঞা (৫৭) অনুসারে সহযোগী লেগুয়ার বহুপদী হলো

$$L_n^m(x) = \frac{(-1)^m\,(n!)^2}{m!\,(n-m)!}\; {}_1F_1(-n+m,\, m+1\, ;\, x) \tag{৭৭}$$

যখন $n \geqslant m$

অনুরূপভাবে সূত্র (৫৯) অনুসারে $L_n^m(x)$ এর সূত্র হলো

$$L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left\{ e^x \frac{d^n}{dx^n}\,(x^n e^{-x}) \right\} \tag{৭৮}$$

কয়েকটি সহজ সহযোগী লেগুয়ার বহুপদী (৭৮) থেকে নির্ণয় করে দেখানো হলো

$$L_1^1(x) = -1, \qquad L_3^3(x) = -6$$

$$L_2^1(x) = -4 + 2x, \qquad L_4^1(x) = -96 + 144x - 48x^2 - 4x^3$$

$$L_2^2(x) = 2, \qquad L_4^2(x) = 144 - 96x + 12x^2$$

$$L_3^1(x) = -18 + 18x - 3x^2, \qquad L_4^3(x) = -96 + 24x$$

$$L_3^2(x) = 18 - 6x, \qquad L_4^4(x) = 24$$

সহযোগী লেগুয়ার বহুপদীর সংজ্ঞা (৭৭) ছাড়াও আরো একটি সংজ্ঞা আছে, তা হলো

$$L_n^m(x) = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,{}_1F_1(-n, m+1; x) \tag{৭৯}$$

যা অন্তরকরণ সমীকরণ

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (m + 1 - x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \tag{৮০}$$

এর সমাধান। কাজেই সহযোগী লেগুয়ার বহুপদী সম্পর্কে আলোচনা করতে গেলে সংশ্লিষ্ট অন্তরক সমীকরণের প্রতিও নজর রাখতে হবে।

৮.১০ সহযোগী লেগুয়ার ফাংশন

লেগুয়ার বহুপদীর সমীকরণ (৫৬) যা বহুপদী $L_n(x)$ এর উৎস ফাংশন, তা থেকে সহযোগী লেগুয়ার বহুপদীর সংজ্ঞা দেয়া যায় অনুরূপভাবে :

$$(-1)^m t^m \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = (1-t)^{m+1} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{L_n^m(x)}{n!} t^n \tag{৮১}$$

এই অভেদটি সহযোগী লেগুয়ার বহুপদীর পৌনঃপুনিক সূত্র নির্ণয় করার জন্য ব্যবহার করা যাবে। এটি সহযোগী লেগুয়ার বহুপদীর উৎস ফাংশন।

লেগুয়ার ফাংশন $F_{nk}(x)$ এর সংজ্ঞা নিচের সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়ে থাকে যেখানে k পূর্ণ সংখ্যা :

$$F_{nk}(x) = e^{-x/2} x^k L_{n+1}^{2k+1}(x), \quad (n \geq k+1) \tag{৮২}$$

যদি সমীকরণ (৭৬)-এ $m = 2k+1$, $n = n+1$, $y = e^{x/2} x^{-k} F(x)$ লেখা যায় তবে $F_{nk}(x)$ নিচের সাধারণ অন্তরক সমীকরণকে সিদ্ধ করে :

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dF}{dx} - \left\{\frac{1}{4} - \frac{n}{x} + \frac{k(k+1)}{x^2}\right\} F = 0 \tag{৮৩}$$

প্রশ্নমালা

১। প্রমাণ কর, যখন $m < n$

$$\frac{d^m}{dx^m} H_n(x) = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x)$$

২। প্রমাণ কর :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{H_n(x)\}^2 \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}} \exp\left(\frac{4x^2t}{1+t}\right)$$

৩। প্রমাণ কর যে,

$$L_n(2x) = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{2^{n-m}(-1)^m}{m!\,(n-m)!} L_{n-m}(x)$$

৪। প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{d}{dx} L_n^m(x) = L_n^{m+1}(x)$

(ii) $L_{n+1}^m(x) + (x-2n-1)\, L_n^m(x) + m\, L_n^{m-1}(x)$

$$+ n^2 L_{n-1}^m(x) = 0$$

(iii) $L_n^m(x) - n\, L_{n-1}^m(x) + n\, L_{n-1}^{m-1}(x) = 0$

৫। দেখাও যে,

$$\int_0^1 x^m (1-x)^p L_n^m(ax)\, dx$$

$$= (-1)^{p+1} \frac{(n!)^2\, p!}{\{(n+p)!\}^2} L_{n+p+1}^{m+p+1}(a)$$

নবম অধ্যায়

লাপ্লাসের সমীকরণ
(Laplace Equation)

৯.১ লাপ্লাস সমীকরণ

ফলিত গণিতের মধ্যে সম্ভবত সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ আংশিক অন্তরক সমীকরণ হলো লাপ্লাস সমীকরণ

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad (১)$$

যেখানে ফাংশন $V(x,y,z)$ কে পটেনসিয়াল ফাংশন বলে। যদি (x,y,z) আয়তাকার স্থানাংক হয় তবে $V(x,y,z)$ ফাংশন যা লাপ্লাস সমীকরণ সিদ্ধ করে, তার প্রকৃতি হবে নিম্নরূপ :

(ক) কোনো স্থানে আকর্ষণীয় পদার্থ না থাকলে সেখানকার মাধ্যাকর্ষণজনিত পটেনসিয়াল ফাংশন হবে $V(x,y,z)$ ।

(খ) সম ডাইইলেকট্রিকের মধ্যে স্থির তড়িৎবিদ্যার তত্ত্বে ফাংশন $V(x,y,z)$ হবে স্থির তড়িত পটেনসিয়াল ফাংশন।

(গ) চুম্বক তত্ত্বে মুক্ত জায়গায় চুম্বকীয় পটেনসিয়াল ফাংশন হবে $V(x,y,z)$ ।

(ঘ) কঠিন বস্তুর মধ্যে অবিচলিত বিদ্যুৎ প্রবাহের ক্ষেত্রে বৈদ্যুতিক পটেনসিয়াল হবে $V(x,y,z)$ ।

(ঙ) কঠিন বস্তুর মধ্যে তাপ পরিচালন সাম্যাবস্থা তত্ত্বে $V(x,y,z)$ তাপমাত্রা নির্দেশ করে।

(চ) অঘূর্ণায়মান তরল পদার্থের চলাচল ক্ষেত্রে তরল পদার্থের গতি পটেনসিয়াল হবে $V(x,y,z)$ ।

উপরিউক্ত বিষয়গুলি বস্তুগতভাবে আলাদা হলেও তাদের ক্ষেত্রে গাণিতিক বিশ্লেষণ একই ধরনের। এখানে চলকগুলি পৃথকীকরণের মাধ্যমে লাপ্লাসের সমীকরণ সমাধান করা হবে। প্রাপ্ত সমাধানগুলিকে প্রারম্ভিক এবং প্রান্তিক শর্তে বিশেষ ক্ষেত্রে খাপ খাওয়ানোর প্রচেষ্টা নেয়া হবে।

এখানে একটি বিষয় উল্লেখযোগ্য যে, লাপ্লাসের সমীকরণের সমাধানগুলিকে হার্মোনিক ফাংশন বলে। অর্থাৎ যে সকল ফাংশন লাপ্লাসের সমীকরণকে সিদ্ধ

করে সেগুলি হলো হার্মোনিক ফাংশন। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, যদি $V(x,y,z)$ এমন একটি ফাংশন হয় যার জন্য আমরা লাপ্লাসের সমীকরণ

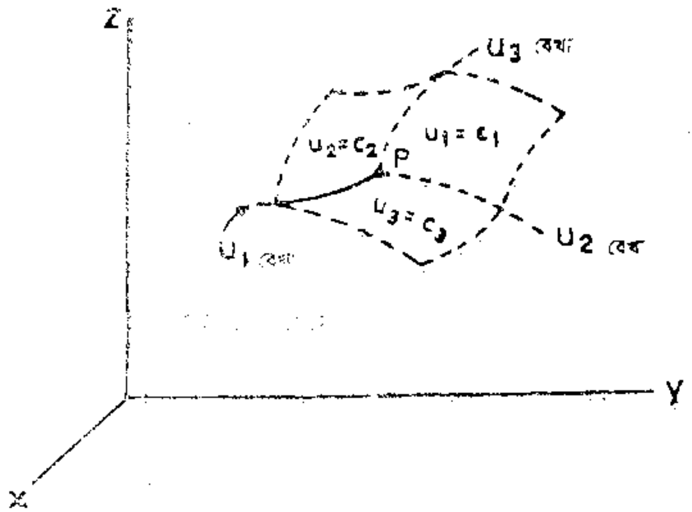
$$\nabla^2 V = 0$$

লাভ করি, তাহলে ফাংশন $V(x,y,z)$ কে হার্মোনিক (harmonic) ফাংশন বা হার্মোনিক্স (harmonics) বলে। সমীকরণের সমাধানের স্থানাংক ভেদে এর নাম স্থানাংক অনুসারে হয়। যেমন, বৃত্তীয় স্থানাংক (r,θ)তে লাপ্লাসের সমীকরণের সমাধানের নাম বৃত্তীয় হার্মোনিক্স। তেমনই চোংগীয় হার্মোনিক্স, গোলকীয় হার্মোনিক্স, ইত্যাদি।

৯.২ স্থানাংক পরিবর্তন

মনে করি (x, y, z) হলো যে কোনো বিন্দুর আয়তাকার স্থানাংক যা ফাংশন (u_1, u_2, u_3) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়:

$$\begin{aligned} x &= x(u_1, u_2, u_3) \\ y &= y(u_1, u_2, u_3) \qquad (২) \\ z &= z(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$



চিত্র : ৯.১

বিকল্পভাবে, মনে করি উপরিউক্ত সমীকরণগুলির সমাধান নিম্ন আকারে প্রকাশ করা যায়:

$$u_1 = u_1(x, y, z)$$

$$u_2 = u_2(x, y, z) \qquad (৩)$$
$$u_3 = u_3(x, y, z)$$

এখানে ধরে নেয়া হলো যে (২) এবং (৩) এর ফাংশনগুলি এক মানবিশিষ্ট। তাদের আংশিক অন্তরকগুলি অবিচ্ছিন্ন, স্থানাংক (x, y, z) এবং (u_1, u_2, u_3) এর মধ্যে সম্পর্ক হলো অদ্বিতীয়। এক্ষেত্রে যে কোনো বিন্দু p এর স্থানাংক (u_1, u_2, u_3)-কে বক্র স্থানাঙ্ক বলে। প্রথমে লাপ্লাসের সমীকরণকে চক্র স্থানাংকে রূপান্তরিত করা হবে। পরে তাকে ইপ্সিত স্থানাংক পরিবর্তন করে কার্যোপযোগী করা হবে।

এই প্রেক্ষিতে মনে করি

$$\nabla V = f_1 \bar{e}_1 + f_2 \bar{e}_2 + f_3 \bar{e}_3$$

যেখানে e_1, e_2, e_3 হলো যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 রেখাগুলির দিকে একক স্পর্শক (tangent) ভেক্টর এবং f_1, f_2, f_3 গুলিকে নির্ণয় করতে হবে। যেহেতু কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\bar{r} = \bar{r}(u_1, u_2, u_3)$ এর জন্য আমরা পাই

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} du_3$$

$$= h_1 \bar{e}_1\, du_1 + h_2 \bar{e}_2\, du_2 + h_3 \bar{e}_3\, du_3$$

যা থেকে নিচের সম্পর্ক পাওয়া যায়,

$$dV = \nabla V . d\bar{r} = h_1 f_1\, du_1 + h_2 f_2\, du_2 + h_3 f_3\, du_3 \qquad (৪)$$

কিন্তু আমরা জানি

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial V}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial V}{\partial u_3} du_3 \qquad (৫)$$

ফলে (৪) এবং (৫) তুলনা করে আমরা পাই

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial u_1}, \quad f_2 = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial u_2}, \quad f_3 = \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial V}{du_3}$$

এ থেকে নিম্নের আংশিক অনুবর্তক পাওয়া যায়,

$$\nabla V = \frac{\bar{e}_1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} + \frac{\bar{e}_2}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} + \frac{\bar{e}_3}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \qquad (৬)$$

মনে করি $V = u_1$, তাহলে (৬) থেকে পাওয়া যায়

$$\nabla u_1 = \frac{\bar{e}_1}{h_1}$$

অনুরূপভাবে আরো পাওয়া যায়

$$\nabla u_2 = \frac{\bar{e}_2}{h_2}, \qquad \nabla u_3 = \frac{\bar{e}_3}{h_3}$$

ফলে আমরা নিচের সম্পর্কগুলি পেয়ে যাই :

$$\nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{h_2 h_3} = \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3}$$

অথবা
$$\bar{e}_1 = h_2 h_3 (\nabla u_2 \times \nabla u_3)$$

একই নিয়মে অন্য ভেক্টরগুলো পাওয়া যাবে যথা :

$$\bar{e}_2 = h_3 h_1 (\nabla u_3 \times \nabla u_1)$$

$$\bar{e}_3 = h_1 h_2 (\nabla u_1 \times \nabla u_2)$$

এখন
$$\begin{aligned}
\nabla . (A_1 \bar{e}_1) &= \nabla . (A_1 h_2 h_3 \; \nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla (A_1 h_2 h_3) . \; \nabla u_2 \times \nabla u_3 \\
&\quad + A_1 h_2 h_3 \; \nabla . (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\
&= \nabla (A_1 h_2 h_3) . \; \frac{\bar{e}_2}{h_2} \times \frac{\bar{e}_3}{h_3} + 0 \\
&= \nabla (A_1 h_2 h_3) . \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \left[\frac{\bar{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\bar{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_1 h_2 h_3) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} (A_1 h_2 h_3) \right] . \frac{\bar{e}_1}{h_2 h_3} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3)
\end{aligned}$$

অনুরূপভাবে

$$\nabla . (A_2 \bar{e}_2) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_3 h_1)$$

$$\nabla.(A_3\overline{e_3}) = \frac{1}{h_1h_2h_3} \quad \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3\, h_1\, h_2)$$

এর ফলে $\nabla.A$ এর মান দাঁড়ায়

$$\nabla.\overline{A} = \nabla.(A_1\overline{e_1} + A_2\,\overline{e_2} + A_3\,\overline{e_3})$$

$$= \nabla.(A_1\overline{e_1}) + \nabla.(A_2\overline{e_2}) + \nabla.(A_3\,\overline{e_3})$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}\,(A_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right] \qquad (৭)$$

যদি $\overline{A} = \nabla V$ হয় তাহলে (৫) অনুসারে পাওয়া যায়

$$A_1 = \frac{1}{h_1}\,\frac{\partial V}{\partial u_1}\ ,\ A_2 = \frac{1}{h_2}\,\frac{\partial V}{\partial u_2}\ ,\ A_3 = \frac{\partial V}{\partial u_3}$$

উক্ত সম্পর্কগুলি ব্যবহার করে আমরা (৬) এবং (৭) থেকে নিচের সম্পর্কটি পেয়ে যাই :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\quad\frac{\partial V}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\quad\frac{\partial V}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\,\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)\right] \qquad (৮)$$

যা বক্র স্থানাঙ্কে $\nabla^2 V$ এর প্রকাশ। ডানপক্ষকে শূন্যের সাথে সমান করলে লাপ্লাস সমীকরণ (১) বক্র স্থানাঙ্কে রূপান্তরিত হবে।

(ক) চোংগীয় স্থানাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণ : সমীকরণ (৮) কে চোংগীয় স্থানাঙ্ক (r, θ, z) এ রূপান্তর করার জন্য আমরা মনে করি

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = z$$

$$h_1 = 1, \quad h_1 = r, \quad h_3 = 1$$

ফলে সমীকরণ (৮) থেকে লাপ্লাস সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\quad\frac{\partial V}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\,\frac{\partial V}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\,\frac{\partial V}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1.r.1}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.1.}{1}\ \frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1.\ 1.}{r}\ \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1.\ r.}{1}\ \frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (৯)$$

(খ) গোলকীয় স্থানাঙ্কে লাপ্লাস সমীকরণ : গোলকীয় স্থানাঙ্ক (r, θ, φ)-এ সমীকরণ (৮) কে রূপান্তর করার জন্য মনে করি

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \varphi$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\theta$$

এর ফলে লাপ্লাস সমীকরণ (৮) নিচের আকারে পাওয়া যায়

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\ \frac{\partial V}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\ \frac{\partial V}{\partial u_2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\ \frac{\partial V}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1.r.r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r.r\sin\theta}{1}\ \frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{r\sin\theta.1}{r}\ \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1.r}{r\sin\theta}\ \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin\theta}\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)$$

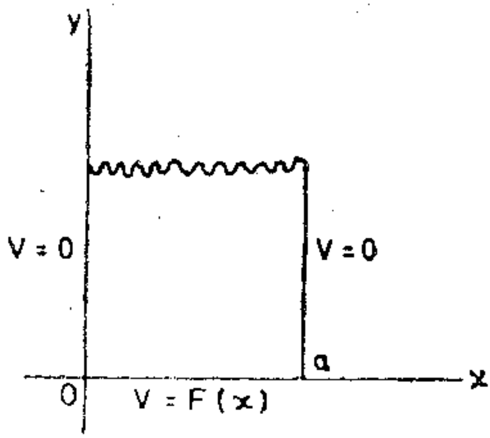
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0 \qquad (১০)$$

সমীকরণ (৯) এবং (১০) হলো যথাক্রমে চোংগীয় এবং গোলকীয় স্থানাঙ্কে লাপ্লাসের সমীকরণ (১) এর রূপ।

লাপ্লাস সমীকরণের ব্যবহার

৯.৩ দ্বিমাত্রিক অবিচলিত তাপ প্রবাহ

দ্বিমাত্রিক জগতে লাপ্লাস সমীকরণের সহজ সমাধান নির্ণয়ের জন্য আমরা নিম্নোক্ত সমস্যাটি বিবেচনা করতে পারি। মনে করি একটি পাতলা পাত যা রেখা $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=\infty$ দ্বারা সীমাবদ্ধ। মনে করি $y=0$ তে তাপমাত্রা সময়ের সাথে ধ্রুবক যা $F(x)$ দ্বারা নির্ণয় করা যাবে। অন্য প্রান্তগুলিতে তাপমাত্রা সব সময় শূন্য। আমরা আরো ধরে নিব যে কোনো তল হতে তাপমাত্রা নির্গত হবে না যা হলো সমস্যাটির প্রারম্ভিক শর্ত। এ ছাড়াও সব জায়গাতে তাপমাত্রা সময়ের উপর নির্ভরশীল নয়। আমাদের কাজ হলো পাতের মধ্যে তাপমাত্রা নির্ণয় করা।



চিত্র : ৯.২

উপরিউক্ত সমস্যাটি গাণিতিকভাবে নিম্ন আকারে প্রকাশ করা যায় :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (১১)$$

যার প্রান্তিক শর্তগুলি হলো

$$\begin{array}{cccc} V=0 & V=0 & V=0 & V=F(x) \\ x=0 & x=a & y=\infty & y=0 \end{array} \qquad (১২)$$

সমীকরণ (১১) এর সমাধানের জন্য আমরা মনে করি

$$V(x, y) = f(x)\, g(y) \qquad (১৩)$$

যেখানে $f(x)$ হলো কেবল x এর ফাংশন এবং $g(y)$ হলো কেবল y এর ফাংশন। এখন (১৩) কে (১১)-তে বসিয়ে আমরা পাই

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{g(y)}\frac{d^2g(y)}{dy^2} \tag{১৪}$$

সমীকরণ (১৪) থেকে একটি বিষয় লক্ষণীয় যে, এর বামপক্ষ কেবল x এর ফাংশন এবং ডানপক্ষ শুধু y এর ফাংশন। অর্থাৎ বামপক্ষে x এর মানের পরিবর্তন করলে ডানপক্ষের কোনো পরিবর্তন হয় না। আবার ডানপক্ষে y এর মানের পরিবর্তন করলে বামপক্ষের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। ফলে একপক্ষ অন্য পক্ষের সাপেক্ষে ধ্রুবক। কাজেই আমরা বলতে পারি, উভয়পক্ষ কোনো ধ্রুবকের সমান। তা না হলে সমীকরণ (১৪) টিকতে পারে না। অতএব মনে করি

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{g}\frac{d^2g}{dy^2} = -k^2 \tag{১৫}$$

যেখানে k একটি ধ্রুবক। ফলে আমরা দুটি সমীকরণ পেয়ে যাই :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = -k^2f \tag{১৬}$$

$$\frac{d^2g}{dy^2} = k^2g \tag{১৭}$$

এর দ্বারা দেখা যায় যে চলকগুলি পৃথক হয়ে গেছে। আংশিক অন্তরক সমীকরণের সমাধান এ পদ্ধতিতে নির্ণয় করার নাম হলো চলক পৃথককরণ পদ্ধতি। সমীকরণ (১৬) এবং (১৭) হলো প্রথম মাত্রার দ্বিতীয় ক্রমের যোগাশ্রয়ী অন্তরক সমীকরণ। প্রচলিত পদ্ধতিতে তাদের সমাধান করলে সমাধানগুলি যথাক্রমে হবে

$$f(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \tag{১৮}$$

$$g(y) = C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky} \tag{১৯}$$

যেখানে c_1, c_2, c_3, c_4 হলো যে কোনো ধ্রুবক। ফলে সমীকরণ (১১) এর সমাধান হলো

$$\begin{aligned} V(x, y) &= f(x)\, g(y) = (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)(C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky}) \\ &= e^{-ky}(A \cos kx + B \sin kx) \\ &\quad + e^{ky}(C \cos kx + D \sin kx) \end{aligned} \tag{২০}$$

যেখানে A, B, C, D যে কোনো ধ্রুবক। এখন প্রান্তিক শর্ত (১২) অনুসারে উক্ত সমাধানকে আমরা উপযোগী করে নিব।

উক্ত শর্ত থেকে দেখা যায় যে, যখন $y = \infty$ তখন $V = 0$, কাজেই আমরা পাই

$$C = D = 0$$

আবার যদি $x = 0$ হলে $V = 0$ হয় তবে আমরা সমাধানে কোসাইন পদ পেতে পারি না। কাজেই $A = 0$।

আবার দেখা যায় যে, $x = a$ হলে $V = 0$ হয়। সে কারণে আমরা পাই

$B \sin ka = 0$, (y এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য) যদি এখানে $B = 0$ ধরা হয় তবে উক্ত সমীকরণের শূন্য ছাড়া আর কোনো সমাধান পাওয়া যায় না। কাজেই অশূন্য সমাধানের জন্য আমরা ধরে নিব যে $B \neq 0$, ফলে

$$\sin ka = 0$$

যার সমাধান হলো

$$ka = m\pi$$

অথবা $$k = \frac{m\pi}{a}, \text{ যেখানে } m = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

অতএব m এর প্রতিটি মানের জন্য নির্ণেয় সমাধান হলো

$$V_m(x, y) = B_m e^{-m\pi y/a} \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (২১)$$

যেখানে B_m হলো কোনো ধ্রুবক। ফলে (১১) এর সাধারণ সমাধান হবে

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-m\pi y/a} \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (২২)$$

এখন B_m এর মান নির্ণয়ের জন্য প্রান্তিক শর্ত

$$V = F(x) \quad \text{যখন } y = 0$$

ব্যবহার করতে পারি। ফলে আমরা পাই

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (২৩)$$

এটি ফুরিয়ার আধা পাল্লার সাইন সিরিজ। এটি থেকে B_m এর মান নিম্ন আকারে পাওয়া যায় :

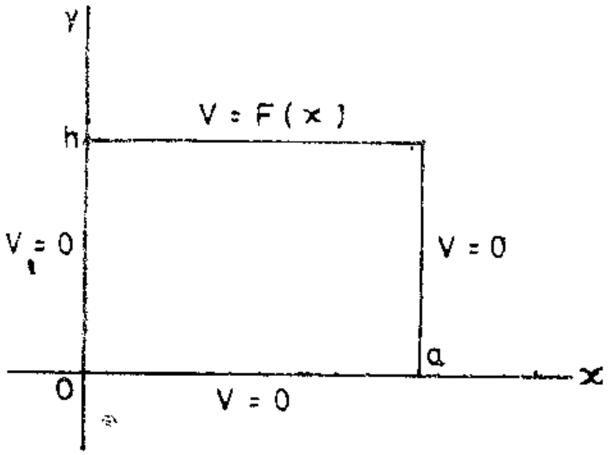
$$B_m = \frac{2}{a} \int_0^a F(x) \sin \frac{m\pi x}{a}\, dx \qquad (২৪)$$

এর ফলে সমীকরণ (১১) এর সাধারণ সমাধান (২২) পরিপূর্ণ হলো।

৯.৪ সসীম পাতে তাপ প্রবাহ

এই সমস্যাটি উপরিউক্ত সমস্যার অনুরূপ কিন্তু এর একটি সহজ পরিবর্তন। মনে করি পাতের মধ্যে তাপমাত্রার অবস্থা নিচের প্রান্তিক শর্তগুলি দ্বারা নির্ধারিত :

$$V=0 \qquad V=0 \qquad V=0 \qquad V=F(x)$$
$$x=0 \qquad x=a \qquad y=0 \qquad y=h$$



চিত্র : ৯.৩

অবিচলিত তাপ প্রবাহের জন্য সমস্যাটির সমীকরণ হবে লাপ্লাসের সমীকরণ (৯.৩ অনুসারে)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (২৫)$$

ফলে ৯.৩ অনুসারে সমীকরণ (২৫) এর সমাধান হলো (২০), অর্থাৎ

$$V(x, y) = e^{-ky}(A \cos kx + B \sin kx)$$
$$+ e^{ky}(C \cos kx + D \sin kx) \qquad (২৬)$$

প্রান্তিক শর্তের কারণে এখানেও কোসাইন পদ থাকতে পারে না। ফলে $A = C = 0$ এবং k এর মান পূর্ববর্তী সমস্যার ন্যায়,

$$k = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

কাজেই আমরা (২৫) এর সমাধান নিম্ন আকারে পাই :

$$V_m(x, y) = e^{-m\pi y/a} B_m \sin \frac{m\pi x}{a} + e^{m\pi y/a} D_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$= \left(e^{-m\pi y/a} B_m + e^{m\pi y/a} D_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (২৭)$$

প্রান্তিক শর্ত $y = 0, \ V = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant a$, হতে আমরা পাই

$$B_m + D_m = 0$$

অথবা

$$D_m = -B_m$$

কাজেই সমাধান (২৭) দাঁড়ায়

$$V_m(x, y) = B_m \left(e^{-m\pi y/a} - e^{m\pi y/a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$= C_m \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

যেখানে C_m হলো ধ্রুবক।

এখানে m এর সকল মানের জন্য সমাধানগুলি যোগ করলে সমীকরণ (২৫) এর সাধারণ সমাধান পাওয়া যাবে

$$V_m(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (২৮)$$

এখন প্রান্তিক শর্ত, $V = F(x)$ যখন $y = h$, থেকে পাওয়া যায়

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m \sinh \frac{m\pi h}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad (২৯)$$

যা $0 \leqslant x \leqslant a$ এর মধ্যে ফুরিয়ার অর্ধ পাল্লার সাইন সিরিজ। এ থেকে ফুরিয়ার সহগ পাওয়া যায়,

$$C_m \left(\sinh \frac{m\pi h}{a} \right) = \frac{2}{a} \int_0^a F(x) \sin \frac{m\pi x}{a} \, dx \qquad (৩০)$$

ধ্রুবক C_m এর এই মানের জন্য উক্ত সমীকরণের সমাধান (২৮) সম্পূর্ণ হলো।

৯.৫ বৃত্তীয় হার্মোনিক্স

বৃত্তীয় হার্মোনিক্স হলো বৃত্তীয় স্থানাঙ্ক লাপ্লাসের সমীকরণের সমাধান। বৃত্তীয় স্থানাঙ্কে লাপ্লাসের সমীকরণ বিবেচনার জন্য আমরা চোংগীয় স্থানাঙ্কের সমীকরণ ধরে নিয়ে সেখানে V কে z স্থানাঙ্কের অনির্ভরশীল বিবেচনা করলেই যথেষ্ট হবে। ফলে সমীকরণ (৯) থেকে আমরা পাই

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0 \qquad (৩১)$$

এর সমাধানের জন্য আমরা মনে করি

$$V(r,\theta)=f(\theta)\,g(r) \qquad (৩২)$$

এখন V এর এই মান (৩১)-এ স্থাপন করলে পাওয়া যায়

$$\frac{f(\theta)}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg}{dr}\right)+\frac{g(r)}{r^2}\frac{d^2f}{d\theta^2}=0$$

একে r^2 দ্বারা গুণ এবং fg দ্বারা ভাগ করে নিচের সমীকরণটি পাওয়া যাবে :

$$\frac{1}{g(r)}\left(r^2\frac{d^2g}{dr^2}+r\frac{dg}{dr}\right)=-\frac{1}{f(\theta)}\frac{d^2f}{d\theta^2}=k^2 \qquad (৩৩)$$

যেহেতু বামপক্ষ কেবল r-এর ফাংশন এবং ডানপক্ষ শুধু θ-এর ফাংশন, কাজেই উভয় পক্ষই কোনো ধ্রুবক k^2 এর সমান হবে। তা না হলে এই সমীকরণ টিকতে পারে না। কাজেই (৩৩) থেকে আমরা দুটি সমীকরণ পাই যেগুলি হলো

$$\frac{d^2f}{d\theta^2}+k^2f=0 \qquad (৩৪)$$

$$r^2\frac{d^2g}{dr^2}+r\frac{dg}{dr}-k^2g=0 \qquad (৩৫)$$

এর ফলে চলকগুলি পৃথক হয়ে গেছে। এখন সমীকরণ (৩৪) অতি পরিচিত সহজ হার্মোনিক গতির সমীকরণ যার মাত্রা এক এবং ক্রম দুই। এর সমাধান হলো

$$f(\theta)=A\cos k\theta+B\sin k\theta\,,\quad k\neq 0 \qquad (৩৬)$$

সমীকরণ (৩৫) এর সমাধান সহজভাবেই নির্ণয় করা যায় যেহেতু এর ক্রম দুই এবং মাত্রা এক। এর সমাধান হলো

$$g(r)=C\,r^{k}+D\,e^{-k}\,,\ k\neq 0 \qquad (৩৭)$$

যেখানে A, B, C, D যে কোনো ধ্রুবক। এখানে সংখ্যা k হলো হার্মোনিকের মাত্রা। সাধারণভাবে বৃত্তীয় হার্মোনিক্স (৩২) অনুসারে হবে

$$V_k(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)(C_k r^k + D_k r^{-k}) \quad (৩৮)$$

যদি $k = 0$ হয় তবে সমীকরণ (৩৪) এবং (৩৫) থেকে নিচের সমাধানগুলি পাওয়া যায় :

$$\left.\begin{aligned} f(\theta) &= A_0\theta + B_0 \\ g(r) &= C_0 \log_e r + D_0 \end{aligned}\right\} \quad (৩৯)$$

যেখানে A_0, B_0, C_0, D_0 হলো যে কোনো ধ্রুবক। ফলে যখন $k = 0$ তখন সাধারণ সমাধান হবে

$$V_0(r,\theta) = (A_0\theta + B_0)(C_0 \log_e r + D_0) \quad (৪০)$$

ভৌত সমস্যার ক্ষেত্রে বৃত্তীয় হার্মোনিক্সের প্রয়োগের জন্য ফাংশন V_k কে θ-এর এক মানবিশিষ্ট ফাংশন হওয়া প্রয়োজন। যদি আমরা θ কে 2π পর্যন্ত বর্ধিত করি তাহলে xy তলের উপর ফাংশনের মানের কোনো হেরফের হয় না। অর্থাৎ

$$V_k(r, \theta + 2\pi) = V_k(r, \theta) \quad (৪১)$$

যেখানে k পূর্ণ সংখ্যা হওয়া বাঞ্ছনীয়। কাজেই এটি একটি পিরিয়ডিক ফাংশন যার পিরিয়ড 2π।

(ক) **নির্দিষ্ট সমস্যা :** এই সমাধানের প্রয়োগ হিসেবে আমরা একটি নির্দিষ্ট সমস্যা নিম্ন আকারে বিবেচনা করতে পারি। একটি চোংগা যার অর্ধেক তলের তাপমাত্রা V_1 এবং বাকি অর্ধেক তলের তাপমাত্রা V_2 রাখা হয়েছে। এখন চোংগার ভিতরে অবিচলিত তাপমাত্রা নির্ণয় করতে হবে। এই সমস্যা সমাধানের জন্য আমরা নিচের সমীকরণ বিবেচনা করব :

$$\nabla^2 V = 0 \quad (৪২)$$

যেখানে প্রান্তিক শর্তগুলি হলো

$V = V_1$ যখন $r = R,\ 0 < \theta < \pi,$

$V = V_2$ যখন $r = R,\ \pi < \theta < 2\pi$

সমীকরণ (৪২) এর সাধারণ সমাধান হিসেবে আমরা (৩৮) এবং (৪০) কে নিম্ন আকারে লিখতে পারি :

$$V = a_0 \log r + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^k} (q_k \cos k + p_k \sin k\theta) + C_0 \qquad (৪৩)$$

উপরিউক্ত প্রান্তিক শর্তে আমরা প্রথমেই দেখি যে $r = 0$ তে তাপমাত্রা সসীম থাকবে। এ কারণে (৪৩)-এ ধ্রুবক a_0, q_k, p_k শূন্য হওয়া আবশ্যক।
অতএব সমাধানটি দাঁড়ায়

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C_0 \qquad (৪৪)$$

মনে করি চোংগার বৃত্তীয় সীমায়, $r = R$, তাপমাত্রা হলো

$$V = F(\theta) \quad \text{যখন} \quad r = R = a \qquad (৪৫)$$

কাজেই (৪৪) এবং (৪৫) থেকে আমরা পাই

$$F(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} R^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C_0 \qquad (৪৬)$$

এই সমাধানে a_k, b_k, C_0 ধ্রুবকগুলি নির্ণয়ের জন্য ফুরিয়ার সিরিজ বিস্তারে ফুরিয়ার সহগ নির্ণয়ের প্রক্রিয়া (অধ্যায় ৩) অনুসরণ করতে পারি। ফলে আমরা পাই

$$a_k = \frac{1}{R^k \pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \cos k\theta \, d\theta$$

$$b_k = \frac{1}{R^k \pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \sin k\theta \, d\theta$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta \tag{৪৭}$$

(খ) **বিশেষ বিবেচনা ঃ** বিশেষ ক্ষেত্রে যদি এমন হয় যে, চোংগার উপরের অর্ধেকের তাপমাত্রা V_0 এবং নিচের অর্ধেকের তাপমাত্রা শূন্য, তাহলে আমরা পাই

$$a_k = \frac{V_0}{R^k\pi}\int_0^{\pi} \sin k\theta \, d\theta = 0$$

$$b_k = \frac{V_0}{R^k\pi}\int_0^{\pi} \sin k\theta \, d\theta = \frac{2V_0}{R^k\pi k}, \quad (\text{n বিজোড়})$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V_0 \, d\theta = \frac{V_0}{2} \tag{৪৮}$$

কাজেই (৪৪) থেকে নিচের সমাধান পাওয়া যায়

$$V(r,\theta) = \frac{2V_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k \frac{\sin k\theta}{k} + \frac{V_0}{2} \tag{৪৯}$$

৯.৬ চোংগীয় হার্মোনিক্স

ত্রিমাত্রিক চোংগীয় স্থানাঙ্ক (r, θ, z)-এ লাপ্লাস সমীকরণ (৯) হলো

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{৫০}$$

এর সমাধান হিসেবে আমরা মনে করি

$$V = F(\theta)\, G(r)\, H(z) \tag{৫১}$$

এখন (৫১) থেকে ফাংশন V এর মান (৫০)-এ স্থাপন করে কিছু পুনর্বিন্যাসের পর পাওয়া যায়

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dz^2} = -\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dr^2} - \frac{1}{rG}\frac{dG}{dr} - \frac{1}{r^2F}\frac{d^2F}{d\theta^2} \tag{৫২}$$

সমীকরণ (৫২) থেকে দেখা যায় যে বামপক্ষ কেবল z এর ফাংশন এবং ডানপক্ষ r এবং θ এর ফাংশন। কাজেই বামপক্ষে z এর মানের পরিবর্তনের সাথে ডানপক্ষের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। কাজেই বামপক্ষ অবশ্যই কোনো ধ্রুবকের সাথে সমান হবে। অন্যথায় এ সমীকরণ টিকতে পারে না। মনে করি

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dz^2}=k^2$$

অথবা

$$\frac{d^2H}{dz^2}=k^2H \tag{৫৩}$$

যার সমাধান হলো

$$H(z)=Ae^{kz}+Be^{-kz} \tag{৫৪}$$

যেখানে A এবং B ধ্রুবক।

এরপর আমরা (৫৩) ব্যবহার করে (৫২) থেকে নিচের সমীকরণ পাই :

$$\frac{r^2}{G}\frac{d^2G}{dr^2}+\frac{r}{G}\frac{dG}{dr}+k^2r^2=-\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\theta^2} \tag{৫৫}$$

এই সমীকরণে যেহেতু বামপক্ষ কেবল r এর ফাংশন এবং ডানপক্ষ শুধু θ-এর ফাংশন, কাজেই উভয়পক্ষই কোনো ধ্রুবকের সমান হবে। মনে করি ধ্রুবকটি m^2, ফলে আমরা পাই

$$\frac{d^2F}{d\theta^2}+m^2F=0 \tag{৫৬}$$

যার সমাধান হলো

$$F(\theta)=C\cos m\theta+D\sin m\theta \tag{৫৭}$$

এবং অপরটি সমীকরণ হলো

$$r^2\frac{d^2G}{dr^2}+r\frac{dG}{dr}+(k^2r^2-m^2)G=0 \tag{৫৮}$$

যদি আমরা $kr=x$ ধরি তাহলে (৫৮) হতে পাওয়া যায়

$$x^2\frac{d^2G}{dx^2}+x\frac{dG}{dx}+(x^2-m^2)G=0 \tag{৫৯}$$

সমীকরণ (৫৯) হলো বেসেলের সমীকরণ যা অধ্যায় ৬-এ আলোচনা করা হয়েছে। কাজেই এর সমাধান হবে

$$G(r) = M J_m(x) + N J_{-m}(x)$$

$$= M J_m(kr) + N J_{-m}(x) \qquad (৬০)$$

যখন m এর মান ভগ্ন সংখ্যা, এবং

$$G(r) = M J_m(kr) + N Y_m(kr) \qquad (৬১)$$

যখন m এর মান পূর্ণ সংখ্যা। এখানে **M** এবং **N** যে কোনো ধ্রুবক।

অতএব সমীকরণ (৫০) এর সাধারণ সমাধান হিসেবে পাওয়া যায় :

$$V(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{kz} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) + e^{-kz} (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta) \right] J_m(kr) \qquad (৬২)$$

যখন $r = 0$ তখনও এই সমাধান সসীম। এ ধরনের সমাধান অনেক বৈদ্যুতিক সমস্যা এবং অবিচলিত তাপ প্রবাহ সমস্যার ক্ষেত্রে কার্যকর।

৯.৭ গোলকীয় হার্মোনিক্স

যদি কোনো সমস্যার ক্ষেত্রে প্রান্তিক শর্তগুলি গোলকীয় স্থানাংকে দেয়া থাকে তবে এই স্থানাংকে লাপ্লাসের সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করা প্রয়োজনীয় হয়ে পড়ে। গোলকীয় স্থানাংকে লাপ্লাস সমীকরণ (১০) হলো

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (৬৩)$$

মনে করি এই সমীকরণের সমাধান

$$V = R(r) F(\theta) H(\varphi)$$

$$= R(r) S(\theta, \varphi) \qquad (৬৪)$$

এখানে ফাংশন

$$S(\theta, \varphi) = F(\theta) H(\varphi) \qquad (৬৫)$$

কে তলীয় হার্মোনিক্স বলে। যদি $\phi =$ ধ্রুবক হয় তখন **S** কে আঞ্চলিক তলীয় হার্মোনিক্স বলে। যদি (৬৪) কে (৬৩) তে স্থাপন করে এবং **RS** দিয়ে ভাগ করে দেয়া হয়। তবে আমরা পাই

$$-\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\frac{1}{S\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{S\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2} \qquad (৬৬)$$

এই সমীকরণের বামপক্ষ কেবল r এর ফাংশন এবং ডানপক্ষ θ এবং φ এর ফাংশন। কাজেই উভয়পক্ষ কোনো ধ্রুবকের সমান হবে। মনে করি

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=k=n(n+1) \qquad (৬৭)$$

সমীকরণ (৬৭) এর সমাধান হলো

$$R=Ar^n+Br^{-n-1} \qquad (৬৮)$$

আবার (৬৬) এর দ্বিতীয় সমীকরণ হলো

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2}=-k=-n(n+1)\,S$$

অথবা

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2}+n(n+1)\,S=0 \qquad (৬৯)$$

যদি এর সমাধান $S_n(\theta,\varphi)$ হয় তবে সমীকরণ (৬৩) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$V=\left(Ar^n+\frac{B}{r^{n+1}}\right)S_n(\theta,\varphi) \qquad (৭০)$$

(ক) আঞ্চলিক তলীয় হার্মোনিক্স : একটি গুরুত্বপূর্ণ বিশেষ ক্ষেত্র হলো যখন ϕ ধ্রুবক অর্থাৎ, H ধ্রুবক। এ ক্ষেত্রে S_n হলো কেবল θ এর ফাংশন। ফলে আমরা পাই

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (৭১)$$

এই শর্তে সমীকরণ(৬৯) দাঁড়ায়

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS_n}{d\theta}\right)+n(n+1)\,S_n=0 \qquad (৭২)$$

যদি আমরা ধরে নিই যে

$$x=\cos\theta$$

তাহলে (৭২) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\,S_n}{dx}\right]+n(n+1)\ S_n=0 \tag{৭৩}$$

সমীকরণ (৭৩) হলো লেজেন্ডার সমীকরণ যা অধ্যায় ৭-এ আলোচনা করা হয়েছে। যদি n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে এর সমাধানগুলি লেজেন্ডার বহুপদী $P_n(x)$ হিসেবে পাওয়া যাবে, যেখানে

$$S_n=P_n(x)=P_n(\cos\theta) \tag{৭৪}$$

অতএব সমীকরণ (৬৪) এর সাধারণ সমাধান

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{৭৫}$$

যেখানে A_n এবং B_n যে কোনো ধ্রুবক।

এই সমাধানের বহু প্রয়োগ আছে। স্থির তড়িৎ বিদ্যা, স্থির চুম্বক বিদ্যা এবং পটেনশিয়াল তত্ত্বে এর যথেষ্ট প্রয়োগ দেখা যায়। এসব ক্ষেত্রে গোলকীয় সাদৃশ্য থাকায় এর ব্যবহার উপযোগী। যেমন ফাংশন V যখন Z অক্ষের সাপেক্ষে সদৃশ হয় তখন এটি কোণ ϕ এর উপর অনির্ভরশীল হয়। ফলে এর ব্যবহার সুবিধা-জনক।

৯.৮ তলীয় হার্মোনিক্সের ধর্ম

গ্রীন উপপাদ্যের ব্যবহারে পাওয়া যায়

$$\iiint_V (U\nabla^2 W-W\nabla^2 U)=\iint_S (U\nabla W-W\nabla U).dS \tag{৭৬}$$

এখানে V এবং S হলো যথাক্রমে ভলুম বা ঘন আয়তন ও তল।

মনে করি

$$U=r^m S_m \text{ এবং } W=r^n S_n \tag{৭৭}$$

তাহলে আমরা পাই

$$\nabla^2 U=0 \text{ এবং } \nabla^2 W=0 \tag{৭৮}$$

কাজেই (৭৬) এর বামপক্ষের ভলুম সমাকলনের মান শূন্য। গ্রীনের উপপাদ্য যদি একক ব্যাসার্ধের গোলকের তল বিবেচনা করা হয়, তাহলে আমরা পাই

$$(\nabla U)_s = \frac{\partial}{\partial r}(r^m S_m) = mr^{m-1}S_m = mS_m, \ (r = 1)$$

$$(\nabla W)_s = nS_n \ , \ (r = 1)$$

যেহেতু $(\nabla U)_s$ এবং $(\nabla W)_s$ এর উভয়ের দিক হলো গোলকের লম্ব বা নরমালের দিক, কাজেই (৭৬) এর ৬টি গুণ তার মধ্যে অন্তর্ভুক্ত হয়ে যাবে। ফলে আমরা দেখতে পাই যে

$$\iint_S (nS_n S_m - mS_n S_m)dS = 0$$

অথবা
$$(n - m)\iint_S S_m S_n \, dS = 0 \qquad (৭৯)$$

এবং এর ফলে পাওয়া যায় নিচের ত্রৈখিক সমাকলন

$$\iint_S S_m S_n \, dS = 0 \qquad (৮০)$$

যখন $n \neq m$

লাপ্লাস সমীকরণের সমাধানের প্রয়োগ

৯.৯ একটি আংটির পটেনসিয়াল

যদি কোনো পদার্থের কণা (যার ভর m) কোনো নির্দিষ্ট কাঠামোর (a, b, c) বিন্দুতে অবস্থান করে, তাহলে এই ভরবিশিষ্ট কণা দ্বারা (x, y, z) বিন্দুতে মাধ্যাকর্ষণজনিত পটেনসিয়াল হবে

$$V_m = \frac{m}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \qquad (৮১)$$

আমরা জানি যে, কোনো অঞ্চলে যেখানে পদার্থ অনুপস্থিত সেখানের মাধ্যাকর্ষণ পটেনসিয়াল V লাপ্লাসের সমীকরণ সিদ্ধ করে:

$$\nabla^2 V = 0 \qquad (৮২)$$

আমরা একটি বৃত্তাকার আংটির পটেনসিয়াল নির্ণয় করতে চাই যে আংটি x, y তলে অবস্থান করে, যার কেন্দ্র মূল বিন্দু O তে এবং এর আড় ব্যবচ্ছেদ ক্ষুদ্র।

স্পষ্টত পটেনসিয়াল V হলো z-অক্ষের সাপেক্ষে সদৃশ এবং ϕ কোণের অনির্ভরশীল। অতএব আমরা ধরে নিতে পারি যে এর পটেনসিয়াল নিম্ন আকারের হবে :

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \qquad (৮৩)$$

এখন কাজ হলো ধ্রুবক A_n এবং B_n নির্ণয় করা।

এই অজানা সহগ A_n এবং B_n নির্ণয়ের জন্য আর একটি বিন্দু Q ধরে নিব যা z-অক্ষের উপর অবস্থান করে এবং এটি হতে আংটির অন্যান্য বিন্দুগুলির দূরত্ব একই, যা হবে

$$\sqrt{a^2 + r^2}$$

যেখানে $OQ = r$ এবং a হলো আংটির ব্যাসার্ধ। আংটির আড় ব্যবচ্ছেদ যদি নগণ্য হয় তাহলে Q বিন্দুর পটেন্সিয়াল হবে

$$-\frac{M}{\sqrt{a^2 + r^2}} \qquad (৮৪)$$

যেখানে আংটির মোট ভর M।

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে আমরা পাই

$$-\frac{M}{\sqrt{a^2 + r^2}} = -\frac{M}{a} \left(1 - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{1.3r^4}{2.4a^4} - \cdots \cdots \right) \qquad (৮৫)$$

যখন $r < a$, এবং

$$-\frac{M}{\sqrt{a^2 + r^2}} = -\frac{M}{a} \left(\frac{a}{r} - \frac{1.a^3}{2.r^3} + \frac{1.3a^5}{2.4r^5} - \cdots \cdots \right) \qquad (৮৬)$$

যেখানে $r > a$।

এখন z-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর জন্য যখন $\theta = 0$, তখন সমাধান (৮৩) হয় (৮৫) অথবা (৮৬) তে রূপান্তরিত হবে। কিন্তু আমরা জানি যে

$$P_n(\cos\theta) = P_n(\cos 0) = 1$$

ফলে z-অক্ষের কোনো বিন্দুর জন্য সমাধান (৮৩) দাঁড়ায়

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) \qquad (৮৭)$$

একে (৮৫) এবং (৮৬) এর সাথে তুলনা করে পাওয়া যায়,

$$B_n = 0 \quad \text{যখন } r < a$$

এবং A_n হলো (৮৫) এর সহগ। অপরপক্ষে

$$A_n = 0 \quad \text{যখন } r > a$$

এবং B_n হলো (৮৬) এর সহগ। কাজেই আমরা A_n এবং B_n এর উক্ত মানের জন্য নিম্নোক্ত সমাধানগুলি পেয়ে থাকি :

$$V = \frac{M}{a}\left[P_0(\cos\theta) - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2} P_2(\cos\theta) + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^4}{a^4} P_4(\cos\theta) - \cdots \cdots \right] \qquad (৮৮)$$

যখন $r < a$, এবং

$$V = \frac{M}{a}\left[\frac{a}{r} P_0(\cos\theta) - \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{1.3}{2.4}\frac{a^5}{r^5} P_4(\cos\theta) - \cdots \cdots \right] \qquad (৮৯)$$

যখন $r > a$ ।

৮.১০ গোলকীয় তল সম্পর্কীয় পটেন্সিয়াল

মনে করি গোলকীয় তলে বৈদ্যুতিক পটেন্সিয়াল নির্দিষ্টভাবে রয়েছে যা উক্ত তলের উপর

$$V = F(\theta) \qquad (৯০)$$

দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

গোলকীয় তলের অভ্যন্তরে এবং বহির্ভাগের জায়গাগুলি বৈদ্যুতিক চার্জমুক্ত বলে গণ্য করা হলো। এ ক্ষেত্রে গোলকীয় তলের অভ্যন্তরে এবং বহির্ভাগে পটেন্সিয়াল নির্ণয় করতে হবে।

উপরোক্ত শর্তের আলোকে প্রান্তিক শর্তগুলি হলো

$$V = F(\theta), \quad \text{যখন } r = a \qquad (৯১)$$

এবং $$\underset{r\to\infty}{\mathrm{Lt}}\, V = 0 \qquad (৯২)$$

শর্ত (৯২) অনুসারে অসীম দূরত্বে পটেনশিয়াল শূন্য হয়ে যাবে। আমরা নিচের দুটি বিষয় বিবেচনা করব :

(ক) গোলকীয় তলের বহির্ভাগ অঞ্চল : গোলকীয় তলের বহির্ভাগ অঞ্চলে প্রান্তিক শর্ত (৯২) অনুসারী আমরা r এর ধনাত্মক শক্তি পেতে পারি না। এ ক্ষেত্রে লাপ্লাসের সাধারণ সমাধান (৮৩) এর সহগ $A_n = 0$ হবে, ফলে আমরা পাই

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad r > a \tag{৯৩}$$

এখন সহগ B_n নির্ণয়ের জন্য আমরা প্রান্তিক শর্ত (৯১) ব্যবহার করতে পারি। কাজেই (৯৩) তে $r = a$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$F(\theta) = f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) \tag{৯৪}$$

যদি আমরা $x = \cos\theta$ লেখি তাহলে $f(x)$-কে লেজেন্ডার বহুপদীর সিরিজে নিম্নলিখিতভাবে বিস্তার করা যায় :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(x) \tag{৯৫}$$

অধ্যায়-৭ অনুসারে $P_n(x)$ এর সহগ নির্ণয় করা যায় যা হলো

$$\frac{B_n}{a^{n+1}} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx \tag{৯৬}$$

$$= \frac{2n+1}{2} \int_{0}^{\pi} F(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

কাজেই $$B_n = \frac{(2n+1)\, a^{n+1}}{2} \int_{0}^{\pi} F(\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \tag{৯৭}$$

এখন সহগ B_n এর মানের জন্য (৯৩) হলো প্রাপ্ত সমাধান।

(খ) গোলকীয় তলের অভ্যন্তরের অঞ্চল : গোলকীয় তলের অভ্যন্তর অঞ্চলে পটেন্সিয়াল অসীম হতে পারে না। কাজেই এ ক্ষেত্রে এতে r এর ঋণাত্মক শক্তি থাকতে পারে না। ফলে লাপ্লাসের সমীকরণের সাধারণ সমাধান (৮৩)-তে সহগ $B_n = 0$ এবং এর ফলে আমরা পাই

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \tag{৯৮}$$

যেখানে $r < a$ ।

এখন সহগ A_n এর মান নির্ণয়ের জন্য

$r = a$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$f(\cos\theta) = F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) \tag{৯৯}$$

যদি $\cos\theta = x$ লেখা যায় তাহলে আমরা পাই

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(x) \tag{১০০}$$

পূর্বের মতো কোনো ফাংশনকে লেজেন্ডার বহুপদীর সিরিজে বিস্তার করার ক্ষেত্রে সহগ A_n কে নিম্ন আকারে পাওয়া যায় :

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_0^{\pi} F(\theta)\, P_n(\cos\theta)\, \sin n\theta\, d\theta \tag{১০১}$$

সহগ A_n এর এই মানের জন্য (৯৮) হলো প্রাপ্ত সমাধান।

প্রশ্নমালা

১। r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সুষম গোলকীয় আধার (shell) এর অন্তঃব্যাসার্ধ a এবং বহির্ব্যাসার্ধ b, যদি আধারটির অভ্যন্তরীণ তল এবং বহির্তলের তাপমাত্রা যথাক্রমে সব সময় T_a এবং T_b তে রাখা হয় তাহলে দেখাও যে গোলকীয় আধারের তাপমাত্রা হবে

$$T = (T_a - T_b)\frac{ab}{b-a}\,\frac{1}{r} + \frac{T_b b - T_a a}{b-a}$$

২। এক সেঃ মিঃ পুরু একটি লম্বা তাপ নিরোধক পাতের তাপমাত্রা হলো T যা লম্বা উভয় তলের উপর এবং ছোট একটি তলের উপর শূন্য, যার ফলে

$$T(0, y) = 0,\ T(a, y) = 0,\ T(x, \infty) = 0,\ T(x, 0) = kx$$

দেখাও যে, পাতের মধ্যে অবিচলিত তাপমাত্রা হলো

$$T(x, y) = \frac{2ak}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\pi x/a) \exp(-n\pi y/a)$$

৩। M ভর এবং একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তাকার থালার (disk) মাধ্যাকর্ষণজনিত বিভব (potential) নির্ণয় কর।

৪। r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি চার্জহীন পরিচালনক্ষম অসীম চোংগ এর (cylinder) অক্ষের সাথে লম্বভাবে E শক্তির একটি সমবৈদ্যুতিক ক্ষেত্রকে যুক্ত করা হলো। চোংগার বহিরাঞ্চলের বিভব নির্ণয় কর।

৫। অসীম দূরত্বে শান্ত তরল পদার্থের মধ্যে একটি বৃত্তাকার চোংগ (cylinder) x-অক্ষ বরাবর U গতিতে চলাচল করে। এ ক্ষেত্রে গতি বিভব নির্ণয় কর।

দশম অধ্যায়

পরিবর্তনশীল ক্যালকুলাস

(Variational Calculus)

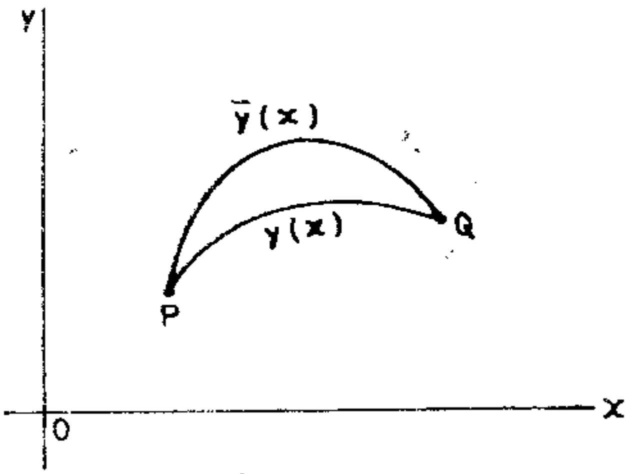
১০.১ পরিবর্তনশীল ক্যালকুলাসের উপাদান

এই সমস্যার মূল প্রশ্নটি নিম্ন আকারে বিবেচনা করা যেতে পারে। মনে করি নির্দিষ্ট সমাকলন I দেয়া আছে যা হলো

$$I = \int_{x=x_1}^{x=x_2} F(x, y, y') \, dx \qquad (১)$$

যেখানে $y = y(x)$, $y' = \frac{dy}{dx}$, অর্থাৎ ফাংশন $F(x, y, y')$ হবে x, y এবং y' এর ফাংশন। এখন প্রশ্ন হলো, "কোন ধরনের ফাংশন $y(x)$ এর জন্য সমাকলন I এর মান সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন হবে।" অন্তরকরণ ক্যালকুলাসের উর্ধ্বমান এবং অধমান সমস্যাগুলির সাথে তুলনামূলকভাবে $y(x)$ এর ধর্ম আমাদের জানা নেই। কিন্তু $y(x)$-কে এমনভাবে নির্ণয় করতে হবে যাতে সমাকলন I এর উর্ধ্বমান অথবা অধমান থাকে। ফলিত গণিতে এ ধরনের সমস্যা অনবরত আমাদের সামনে উদ্ভব হয়। উপরোক্ত প্রশ্নকে সহজভাবে একটি বিশেষ ক্ষেত্রে নিলে উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, দুটি বিন্দুর মাঝে অংকিত কোনো রেখা $y(x)$ হলে এর দৈর্ঘ্য সবচেয়ে কম হবে ?

যদি রেখাটি সমতলের উপর হয় তবে স্পষ্টতর সবচেয়ে কম দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট রেখাটি হবে সরলরেখা। কিন্তু সমতলের উপর না হয়ে যদি বক্রতলের উপর রেখাটি অবস্থান করে তবে তার দৈর্ঘ্য সবচেয়ে কম হলেও তা সরলরেখা হবে না। এ ক্ষেত্রে স্বল্প দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট রেখাটিকে বলা হয় জিওডেসিক (geodesic)। উক্ত সমস্যাটির সমাধান করলেই কেবল ইপ্সিত রেখাটির সমীকরণ পাওয়া যাবে। এটিই হলো পরিবর্তনশীল ক্যালকুলাসের মূল উপাদান। এখন এটি দেখানো সম্ভব যে, কোনো পরিচিত ফাংশনের উর্ধ্বমান অথবা অধমান নির্ণয়ের জন্য পরিবর্তনশীল ক্যালকুলাসের উর্ধ্বমান বা অধমান সমস্যাকে প্রয়োগ করা যেতে পারে। এ জন্য মনে করি বাঞ্ছনীয় ফাংশন $y(x)$ এর নিকটতম আর একটি ফাংশন হলো $\bar{y}(x)$। ফাংশন $\bar{y}(x)$ কে নিম্ন মোতাবেক বিবেচনা করা যায়ঃ



চিত্র : ১৩.১

মনে করি $\in$ একটি ক্ষুদ্র পরিমাণ এবং $k(x)$ হলো x এর কোনো ফাংশন যা নিজে অবিচ্ছিন্ন এবং এর প্রথম দুটি জাতক সমাকলন পাল্লার মধ্যে অবিচ্ছিন্ন। এর ফলে নিকটতম ফাংশন $\bar{y}(x)$-কে নিম্নোক্তভাবে অন্তর্ভুক্ত করতে পারি :

$$\bar{y}(x) = y(x) + \in k(x) \qquad (২)$$

$$\bar{y}'(x) = y'(x) + \in k'(x) \qquad (৩)$$

এছাড়া আমরা ধরে নিব যে ফাংশন $\bar{y}(x)$ সমাকলন পাল্লার দুই প্রান্তে $y(x)$ এর সাথে মিলিত হবে। উপরোক্ত চিত্রে P এবং Q বিন্দুতে উক্ত ফাংশন দুটির মিলন দেখানো হয়েছে। ফলে এটি স্পষ্ট যে উক্ত প্রান্ত বিন্দু P এবং Q-তে ফাংশন $k(x)$ এর মান শূন্য।

এরপর যদি সমাকলনে $y(x)$ এর মান স্থাপন করা যায়, তাহলে সমাকলন (১) $\in$ এর ফাংশন হবে। ফলে আমাদের প্রয়োজন হবে যে, ফাংশন $y(x)$ সমাকলন $I(\in)$-কে সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন মানে পরিণত করবে। অর্থাৎ সমাকলন $I(\in)$ এর $\in = 0$ মানের জন্য তার একটি ঊর্ধ্বমান অথবা অধমান থাকতে হবে। কাজেই সমাকলনটি দাঁড়ায়

$$I(\in) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\ y + \in k,\ y' + \in k')\,dx \qquad (৪)$$

যা $\in = 0$ মানের জন্য সর্বোচ্চ মান বা সর্বনিম্ন মানসম্পন্ন হবে।

এখন সমাকলন $I(\in)$ এর যদি প্রান্তিক মান থাকে, অর্থাৎ এর সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন মান থাকে তবে তার শর্ত হলো

$$\frac{dI}{d\in}=0, \quad \text{যখন} \quad \in=0 \tag{৫}$$

পরবর্তী কাজের জন্য আমরা ফাংশন F কে নিম্ন আকারে টেলোর এর সিরিজে বিস্তার করে নিব,

$$F(x, y+\in k, y' + \in k')$$

$$= F(x, y, y') + \in k\frac{\partial F}{\partial y} + \in k'\frac{\partial F}{\partial y'} + \in^2, \in^3 \cdots\cdots \text{এর পদ।}$$

অতএব (৪) থেকে আমরা পাই

$$I(\in) = \int_{x_1}^{x_2}\left[F(x, y, y') + \in k\frac{\partial F}{\partial y} + \in k'\frac{\partial F}{\partial y'} + \in^2, \in^3 \cdots \text{পদ}\right]dx \tag{৬}$$

এরপর (৬) এর সমাকলন চিহ্নের মধ্যে $\in$ এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করে পাওয়া যায়,

$$\frac{dI(\in)}{d\in} = \int_{x_1}^{x_2}\left(k\frac{\partial F}{\partial y} + k'\frac{\partial F}{\partial y'} + \in, \in^2 \cdots\cdots \text{এর পদ}\right)dx. \tag{৭}$$

এখন সমীকরণ (৫) অনুসারে সমীকরণ (৭) এর পদ অবশ্যই $\in = 0$ হলে মান শূন্য হবে।

যেহেতু $\in, \in^2, \cdots$ ইত্যাদি সম্বলিত পদগুলি $\in = 0$ হলে মান শূন্য হয়। ফলে আমরা পাই

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(k\frac{\partial F}{\partial y} + k'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx = 0 \tag{৮}$$

আংশিক সমাকলনের মাধ্যমে (৮) এর দ্বিতীয় পদটি নিম্ন আকারে সংক্ষিপ্ত করা যায়:

$$\int_{x_1}^{x_2} k'\frac{\partial F}{\partial y'}dx = \left[k(x)\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} k(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx \tag{৯}$$

প্রান্ত বিন্দু x_1 এবং x_2 তে যেহেতু $k(x_1)=k(x_2)=0$, অর্থাৎ প্রান্তিক বিন্দু x_1 এবং x_2 তে $k(x)$ এর মান শূন্য, কাজেই (৯) এর প্রথম পদ শূন্য হয়ে যায়। অতএব (৮) হতে পাওয়া যায়,

$$\int_{x_1}^{x_2} k' \frac{\partial F}{\partial y'} dx = -\int_{x_1}^{x_2} k(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx \tag{১০}$$

এখন (১০) থেকে বামপক্ষের মান (৮)-এ বসিয়ে দিলে দাঁড়ায়

$$\int_{x_1}^{x_2} k(x) \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\} dx = 0 \tag{১১}$$

যেহেতু $k(x)$ হলো যে কোনো ফাংশন, ফলে সমীকরণ (১১) যদি সিদ্ধ হতে হয় তবে আমরা তার সমাকলন ফাংশন শূন্য ধরে পাই, $\{k(x) \neq 0\}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{১২}$$

যদি $y(x)$ সমাকলন (১) কে ঊর্ধ্বমান অথবা অধমান সম্পন্ন করে তাহলে $y(x)$ অবশ্যই সমীকরণ (১২) কে সিদ্ধ করবে। সমীকরণ (১২) কে অয়লার লাগ্রাঞ্জ (Euler-Langrange) অন্তরক সমীকরণ বলে। এই সমীকরণ ঊর্ধ্বমান অথবা অধমান নিশ্চিত করে কিনা তা বলা যদিও কঠিন, তবুও এটি ফলিত গণিতের ক্ষেত্রে অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। বলাবাহুল্য যে, $k(x)$ এর মান সবসময় শূন্য নয়। আরো একটি বিষয় লক্ষণীয় যে, যদি ফাংশন F অনেকগুলি নির্ভরশীল চলক y_n বিশিষ্ট হয়:

$$F = F(x, y_n, y_n') \tag{১৩}$$

তাহলে এক্ষেত্রে যে সমীকরণ পাওয়া যাবে তাও অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। এ ক্ষেত্রে আমরা পূর্বের ন্যায় অগ্রসর হতে পারি যেখানে F-এ একটি অনির্ভরশীল চলক y ছিল। মনে করি $y_n(x)$ এর নিকটতম ফাংশন যথাক্রমে

$$\bar{y}_1 = y_1 + \epsilon_1 k_1, \quad \bar{y}_2 = y_2 + \epsilon_2 k_2, \cdots \cdots$$

$$\bar{y}_n = y_n + \epsilon_n k_n \tag{১৪}$$

যেখানে ফাংশন $k_n(x)$ সমাকলনের প্রান্ত বিন্দুগুলিতে শূন্য হয়ে যায়। সমাকলনটি এর ফলে $\in_1, \in_2, \in_3, \cdots \cdots \in_n$ চলকগুলির ফাংশন হবে। পূর্বের ন্যায় অগ্রসর হয়ে সমাকলনের উর্ধ্বমান বা অধমানের শর্ত হিসেবে আমরা পাই

$$\frac{\partial I}{\partial \in_r} = \int_{x_1}^{x_2} k_r(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_r} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_r'} \right) \right\} dx = 0 \qquad (১৫)$$

যেখানে $r = 1, 2, 3, \cdots \cdots, n$ এবং

$$\in_1 = \in_2 = \in_3 \cdots \cdots \cdots \cdots = 0$$

যেহেতু $k_r(x)$ হলো যে কোনো ফাংশন যা প্রান্ত বিন্দুতে ছাড়া শূন্য নয়, ফলে সমীকরণ (১৫) এর সমাকলন ফাংশন শূন্য ধরে আমরা পূর্বের ন্যায় পাই

$$\frac{\partial F}{\partial y_r} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_r'}\right) = 0 \qquad (১৬)$$

যেখানে $r = 1, 2, 3, \cdots \cdots \cdots, n$

সমীকরণ (১৬) থেকে আমরা দেখতে পাই যে, প্রত্যেক অনির্ভরশীল চলকের জন্য অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ বলবৎ থাকে।

১০.২ বিশেষ ক্ষেত্র

যখন ফাংশন $F(x, y, y')$ এর মধ্যে এক বা একাধিক চলক x, y, y' অনুপস্থিত থাকে তখন অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ সহজ আকার ধারণ করে। নিম্নে কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র বিবেচনা করা হলো :

(ক) যদি $F = F(x, y')$ হয়, তাহলে আমরা পাই, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, কাজেই অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ (১২) হতে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

যা থেকে সমাকলনের মাধ্যমে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

যেখানে C হলো x এর সাপেক্ষে ধ্রুবক। কিন্তু $\frac{\partial F}{\partial y'}$ একটি ফাংশন যাকে আমরা V বলতে পারি। অর্থাৎ

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = V(x, y, y')$$

(খ) যদি $F = F(y, y')$ হয়, তাহলে

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

ফলে আমরা নিচের উপাদানগুলি পেতে পারি

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$= 0 + y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$= y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + y''\frac{\partial F}{\partial y'},$$ (অয়লার সমীকরণ ব্যবহার করে)

$$= \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

একে সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$F = y'\frac{\partial F}{\partial y'} + C$$

যেখানে x এর সাপেক্ষে C ধ্রুবক।

অথবা
$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

এই ফাংশনকে $U(x, y, y')$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

অর্থাৎ
$$U(x, y, y') = F(x, y, y') - y'\,V(x, y, y')$$

(গ) যদি $F = F(x, y)$ হয়, তবে

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

ফলে অয়লার লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ (১২) দাঁড়ায়

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

(ঘ) যদি $F = F(y')$ হয়, তাহলে আমরা পাই

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

এর ফলে অয়লার লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

একে সমাকলন করে পাওয়া যাবে

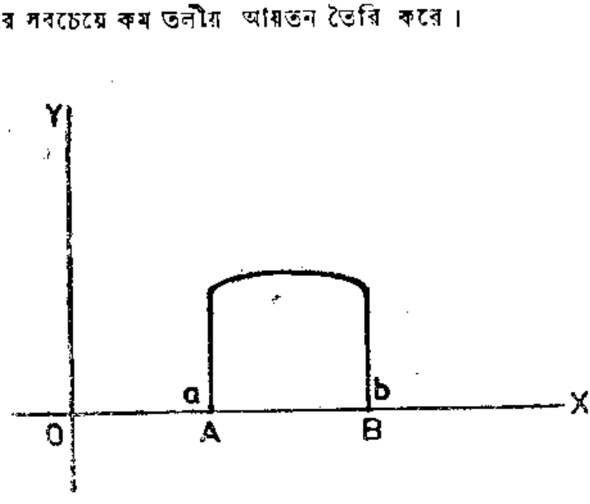
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

যেখানে x এর সাপেক্ষে c ধ্রুবক।

অথবা $$\frac{\partial F}{\partial y'} = V(x, y, y')$$

১০.৩ কয়েকটি উদাহরণ

(ক) দুটি বিন্দু A এবং B এর মধ্যে এমন রেখা নির্ণয় করতে হবে যা x-অক্ষের চারপাশে ঘুরে সবচেয়ে কম তলীয় আয়তন তৈরি করে।



চিত্র : ১০.২

উপরিউক্ত সমস্যা সমাধানের জন্য আমরা নিম্নরূপ বিবেচনা করতে পারি। তল s এর আয়তন নিচের সূত্র থেকে নির্ণয় করা যায়:

$$s = 2\pi \int_a^b y\,ds$$

$$= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (১৭)$$

যেখানে $$y' = \frac{dy}{dx}$$

উপরিউক্ত সমাকলন বিবেচনা করলে সমাকলন ফাংশন হিসেবে আমরা পাই

$$F = y\sqrt{1+y'^2} \qquad (১৮)$$

এই ফাংশনের জন্য অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

অথবা $$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

এই সমীকরণটি সংক্ষিপ্ত করে পাওয়া যায়,

$$1 + y' - yy'' = 0 \qquad (১৯)$$

সমীকরণ (১৯)-কে সমাকলনের জন্য মনে করি

$$y' = \frac{dy}{dx} = p$$

তাহলে $$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

এখন y' এবং y'' এর এই মানগুলি (১৯)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y} \qquad (২০)$$

একে সমাকলন করলে আমরা অবশেষে পাই

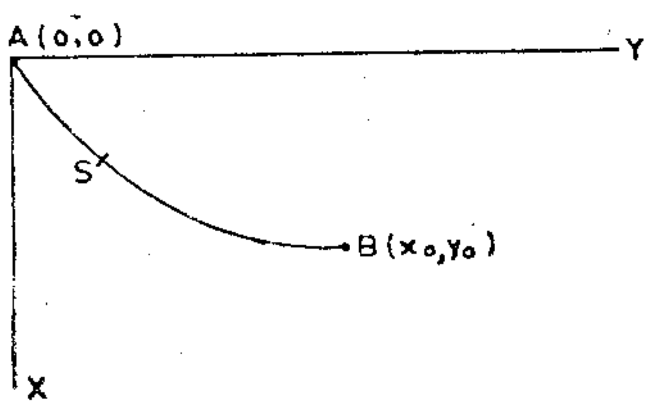
$$y = c_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1} \qquad (২১)$$

যেখানে C_1 এবং C_2 হলো ধ্রুবক।

সমীকরণ (২১) নির্ণেয় রেখা কেটেনারী নির্দেশ করে। এটি বিন্দু A এবং B এর মাঝখানে x-অক্ষের চারদিকে ঘুরে সর্বনিম্ন তলীয় আয়তন তৈরি করে। রেখা (২১) কে A এবং B বিন্দুর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করালে ধ্রুবক C_1 এবং C_2 এর মান নির্ণয় করা যাবে।

(খ) একটি কণা কেবল মাধ্যাকর্ষণ শক্তির মধ্যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্বল্পতম সময়ে নেমে যাবে। এর পথের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

এই সমস্যাটির সমাধান করে নিচের চিত্রটি বিবেচনা করতে পারি। এ ক্ষেত্রে মনে করি A হলো উপরের বিন্দু এবং B নিচের বিন্দু। ধরে নেয়া হলো যে, x-অক্ষ খাড়া নিচের দিকে এবং y-অক্ষ অনুভূমিক রেখার দিকে অবস্থান করছে এবং A কে স্থানাংকের মূল বিন্দু হিসেবে গৃহীত হলো।



চিত্র : ১০.৩

মনে করি A বিন্দু থেকে রেখার উপর যে কোনো বিন্দুর দৈর্ঘ্য হলো S, একই বিন্দুতে কণার গতি v এবং A হতে যে কোনো বিন্দুতে কণাটি নামার সময় হলো t, যদি A থেকে B পর্যন্ত যেতে কণার মোট সময় T লাগে তাহলে আমাদের কাজ হলো উক্ত রেখাটি নির্ণয় করা যার ফলে সময় T সবচেয়ে কম হবে।

এখন গতিবিদ্যা থেকে পাওয়া যায়,

$$dt = \frac{dS}{v} \qquad (২২)$$

যেখানে $$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (২৩)$$

আমরা জানি যে, কোনো মসৃণ রেখা বরাবর একটি কণা এক বিন্দু থেকে অন্য বিন্দুতে নামার জন্য কোনো শক্তি ক্ষয় করে না। কারণ মাধ্যাকর্ষণ পটেনসিয়াল শক্তি গতি শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। ফলে আমরা পাই

$$v = \sqrt{2gx} \qquad (২৪)$$

যেখানে ধরে নেয়া হলো যে কণাটি স্থির বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করেছিল এবং g মাধ্যাকর্ষণজনিত ত্বরণ। সমীকরণ (২৪) থেকে v এর মান সমীকরণ (২২)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gx}}\, dx \qquad (২৫)$$

সমীকরণ (২৫) থেকে মোট সময় T নির্ণয় করা যায় যা হলো

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x=0}^{x=x_0} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}}\, dx \qquad (২৬)$$

প্রদত্ত সমস্যা সমাধানের জন্য T কে সর্বনিম্ন সময় বিবেচনা করাই যথেষ্ট হবে। এ জন্য আমরা মনে করি

$$F = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x}} \qquad (২৭)$$

ফলে আয়লার লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ দাঁড়ায়

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}}\right] = 0 \qquad (২৮)$$

একে সমাকলন করলে আমরা নিচের সমীকরণটি পাই

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1 + y'^2)}} = C \qquad (২৯)$$

যেখানে C হলো ধ্রুবক।

সমস্যাটি সহজ করার জন্য মনে করি

$$C = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{৩০}$$

এর ফলে সমীকরণ (২৯)-কে বর্গ করে এবং পুনর্বিন্যাস করলে পাওয়া যায়,

$$y'^2 - \frac{xy'^2}{a} = \frac{x}{a}$$

যা থেকে পাওয়া যায়

$$y' = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$$

অথবা
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} \tag{৩১}$$

এখন (৩১)-কে সমাকলন করে আমরা পাই

$$y = \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{a-x}} + k$$

অথবা
$$y = a \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax - x^2} + k \tag{৩২}$$

যদি এই রেখাটি মূল বিন্দু $A(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে তাহলে $x = 0$, $y = 0$ এর জন্য ধ্রুবক $k = 0$ হয়। অতএব নির্ণেয় রেখার সমীকরণ হলো

$$y = a \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax - x^2} \tag{৩৩}$$

এই সমীকরণটি একটি সাইক্লয়েড নির্দেশ করে যেখানে a হলো এর উৎস বৃত্তের ব্যাসার্ধ। এই রেখাটিকে $B(x_0, y_0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করালে ধ্রুবক a এর মান পাওয়া যাবে।

(গ) নিম্নোক্ত সমাকলনের স্থির মান নির্ণয় করতে হবে

$$I = \int_{0,\,\pi}^{\pi,\,0} (2y \sin x + y'^2)\, dx$$

উক্ত সমস্যা মোতাবেক সমাকলন I এর হয় সর্বোচ্চ মান, নতুবা সর্বনিম্ন মান থাকবে। তা না হলে I এর স্থির মান পাওয়া যাবে না। কাজেই প্রদত্ত সমস্যার সমাধান নির্ণয়ের জন্য আমরা অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ ব্যবহার করব।

এখানে $$F = 2y \sin x + y'^2 \qquad (৩৪)$$

কাজেই $$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 \sin x\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

ফলে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

থেকে পাওয়া যায়

$$2 \sin x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

এটি সরল করলে দাঁড়ায়

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x \qquad (৩৫)$$

এখন (৩৫)-কে সমাকলন করলে আমরা পাই

$$y = -\sin x + ax + b \qquad (৩৬)$$

যেখানে a, b হলো ধ্রুবক।

সমাকলনের পাল্লার প্রান্ত বিন্দুগুলি থেকে a এবং b এর মান নির্ণয় করা যাবে। এ ক্ষেত্রে পাওয়া যায় নিচের শর্তগুলি :

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{যখন} \quad x = \pi \\ y &= \pi \quad \text{যখন} \quad x = 0 \end{aligned} \qquad (৩৭)$$

এখন প্রথম শর্ত থেকে আমরা পাই

$$b = \pi$$

এবং দ্বিতীয় শর্ত থেকে পাওয়া যায়,

$$a = -1$$

ফলে (৩৬)-এ a, b এর মান বসিয়ে নিচের ফাংশন পাওয়া যাবে :

$$y = -\sin x - x + \pi \qquad (৩৮)$$

এবং একে x এর সাপেক্ষে অন্তরকরণ করলে দাঁড়ায়

$$y' = -\cos x - 1 \qquad (৩৯)$$

অতএব সমাকলন I এর মান নিম্নরূপভাবে নির্ণয় করা যায় :

$$I = \int_{0,\,\pi}^{\pi,\,0} (2y \sin x + y'^2)\, dx$$

$$= \int_{0,\,\pi}^{\pi,\,0} \{2\sin x(-\sin x - x + \pi) + (\cos x + 1)^2\} dx$$

$$= \int_0^{\pi} (-2\sin^2 x - 2x \sin x + 2\pi \sin x + \cos^2 x + 2\cos x + 1) dx$$

$$= \frac{5\pi}{2}$$

যা উক্ত সমাকলনের স্থির মান।

প্রশ্নমালা

১। দেয়া আছে $I = \int_0^{\pi/2} \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\right\} dx$

যখন $x = 0, \; y = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{2}, \; y = 1$

এক্ষেত্রে অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণ সমাধান কর।

২। xy-তলের উপর নিচের সমাকলনের স্থির মান নির্ণয় কর :

$$I = \int_{(0,\,\pi)}^{(\pi,\,0)} \{2y \sin x + (y')^2\}\, dx$$

৩। অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর যখন

$$I = \int_{(0,\,0)}^{(1,\,2)} (y')^2 (1 + y')^2 dx$$

৪। অয়লার-লাগ্রাঞ্জ সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর যখন

$$I = \int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} \{12xy + (y')^2\}dx$$

৫। xy-তলে নিচের সমাকলনের স্থির মান নির্ণয় কর :

$$I = \int_{A}^{B} \{(y')^2 + 2xy - y^2\}\, dx$$

যেখানে $A = (0,\ 0)$ এবং $B = \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

একাদশ অধ্যায়

স্টার্ম-লিওভিলি সমস্যা
(Sturm-Liouville Problems)

১১.১ স্বযুক্ত অন্তরক সমীকরণ

মনে করি দ্বিতীয় ক্রমের যোগাশ্রয়ী অন্তরক আকার হলো

$$a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) \tag{১}$$

তাহলে এর সংশ্লিষ্ট আকার

$$[\, a(x)\, y(x)]'' - [b(x)\, y(x)]' + c(x)\, y(x) \tag{২}$$

কে অন্তরক আকার (১) এর যুক্ত অন্তরক আকার বলে। এটি সমাকলন উৎপাদক নির্মাণের জন্য অতি প্রয়োজনীয়। আমরা আরো দেখতে পাই যে, অন্তরক আকার

$$[R(x)\, y'(x)]' - Q(x)\, y(x) \tag{৩}$$

এর যুক্ত আকারের একই রূপ। এর নিম্ন মোতাবেক যাচাই করা যেতে পারে :

$$[R(x)\, y'(x)]' - Q(x)\, y(x) \tag{৪}$$

$$= R'(x)\, y'(x) + R(x)\, y''(x) - Q(x)\, y(x)$$

$$= R(x)\, y''(x) + R'(x)\, y'(x) - Q(x)\, y(x) \tag{৫}$$

(৪) এর যুক্ত আকার

$$[R(x)\, y(x)]'' - [R'(x)\, y(x)]' - Q(x)\, y(x)$$

$$= [R'(x)\, y(x) + R(x)\, y'(x)]' - R''(x)\, y(x) - R'(x)\, y'(x) - Q(x)\, y(x)$$

$$= R''(x)\, y(x) + R'(x)\, y'(x) + R'(x)\, y'(x) + R(x)\, y''(x)$$

$$- R''(x)\, y(x) - R'(x)\, y'(x) - Q(x)\, y(x)$$

$$= R(x)\, y''(x) + R'(x)\, y'(x) - Q(x)\, y(x)$$

(যা (৫) এর একই আকার)

$$= [R(x)\, y'(x)]' - Q(x)\, y(x) \tag{৬}$$

যাকে স্বযুক্ত আকার বলা হয়। অর্থাৎ কোনো অন্তরক আকার এবং এর যুক্ত আকার যদি একই হয় তবে তাকে স্বযুক্ত আকার বলে।

যদি ফাংশন $y(x)$ এবং $z(x)$ দুটি স্বযুক্ত আকার তৈরি করে তবে তারা নিচের অভেদকে সিদ্ধ করে

$$[(Ry')' - Qy]z - [(Rz')' - Qz]y = \frac{d}{dx}[(zy' - yz')R] \qquad (৭)$$

নিচের অন্তরক সমীকরণ

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(r)\,y(x) = f(x) \qquad (৮)$$

এর উভয় দিকে যদি সমাকলন উৎপাদক

$$R(x) = \exp\{\int p(x)\}dx \qquad (৯)$$

দ্বারা গুণ করা যায় তাহলে উক্ত সমীকরণ এর স্বযুক্ত আকার

$$[R(x)\,y'(x)]' - Q(x)\,y(x) = E(x) \qquad (১০)$$

ধারণ করে, যেখানে

$$Q(x) = -R(x)\,q(x) \text{ এবং } E(x) = R(x)\,f(x)$$

অর্থাৎ (১০) হলো (৮) এর স্বযুক্ত অন্তরক সমীকরণ।

দুই এর বেশি ক্রমের যুক্ত অন্তরক আকার (২) অনুসারে সংজ্ঞায়িত করা যায়। কিন্তু বেশি ক্রমের যোগাশ্রয়ী অন্তরক সমীকরণের সবসময় স্বযুক্ত আকার থাকে না। প্রকাশ থাকে যে সমীকরণ (৮) এর সমজাতীয় অন্তরক সমীকরণ হলো

$$y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0$$

১১.২ একটি উদাহরণ

সমীকরণ (৮) এর সমজাতীয় অন্তরক সমীকরণের ($f(x) = 0$) সমাধানের অস্তিত্ব উপপাদ্যের উদ্ধৃতি হিসেবে নিম্নের সমস্যা আলোচনা করতে পারি। মনে করি উক্ত সমজাতীয় সমীকরণটি নিম্নরূপ

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)\,y(x) = 0 \qquad (১১)$$

যেখানে $q(x)$ এর মধ্যে আর একটি যোগাশ্রয়ী চলক h থাকতে পারে। মনে করি $A(x)$, $B(x)$ এবং $D(x)$ হলো কোনো I ব্যবধানের বিন্দু $x = x_0$-এ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন। মনে করি h হলো জটিল মানের চলক এবং y_0 এবং y_1 হলো h এর অনির্ভরশীল ধ্রুবক। তাহলে প্রারম্ভিক-মান সমস্যা দাঁড়ায়

$$y'' + A(x)y' + [B(x) + h\,D(x)]y = 0 \tag{১২}$$

এখানে প্রান্তিক শর্ত হলো

$$y(x_0, h) = y_0,\ y'(x_0, h) = y_1$$

এখানে $y(x, h)$ জটিল মানবিশিষ্ট ফাংশন যার কেবল একটি সমাধান h এর প্রত্যেক মানের জন্য $y = u(x, h)$ আছে। এখানে ধরে নেয়া হয়েছে যে, ব্যবধান I এর মধ্যে বিন্দু x আছে এবং দুটি চলক x এবং h এর জন্য ফাংশন $u(x, h)$ এবং $u'(x, h)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন। ব্যবধান I এর মধ্যে x এর প্রত্যেক নির্দিষ্ট মানের জন্য $u(x, h)$ এবং $u'(x, h)$ জটিল চলক h এর ফাংশন।

এখন মনে করি প্রান্তিক-মান সমস্যা হলো

$$y'' + hy = 0,\quad y(0, h) = 0,\quad y(1, h) = 0 \tag{১৩}$$

তাহলে এর একটি সমাধান হবে

$$y(x, h) = 0$$

কিন্তু যদি চলক h এর মান $n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ এর যে কোনো একটি হয়, তাহলে সমস্যা (১৩) এর অতিরিক্ত সমাধান হবে

$$y = k \sin n\pi x \tag{১৪}$$

যেখানে k যে কোনো ধ্রুবক। এখানে উল্লেখযোগ্য যে, সমস্যা

$$y''(x) + \pi^2 y(x) = 0,\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 1 \tag{১৫}$$

এর কোনো অবিচ্ছিন্ন সমাধান নেই। কারণ ফাংশন $y = k \sin n\pi x$ যা প্রথম দুটি শর্ত সিদ্ধ করে তা $y(1) = 1$ শর্ত সিদ্ধ করে না, যেখানে k এর যে মানই হোক না কেন। এভাবে উপরোক্ত সমাধানের অস্তিত্ব উপপাদ্যটি ক্রমানুয় সন্নিহিতভাবে প্রমাণ করা যায়।

১১.৩ গ্রীন ফাংশন

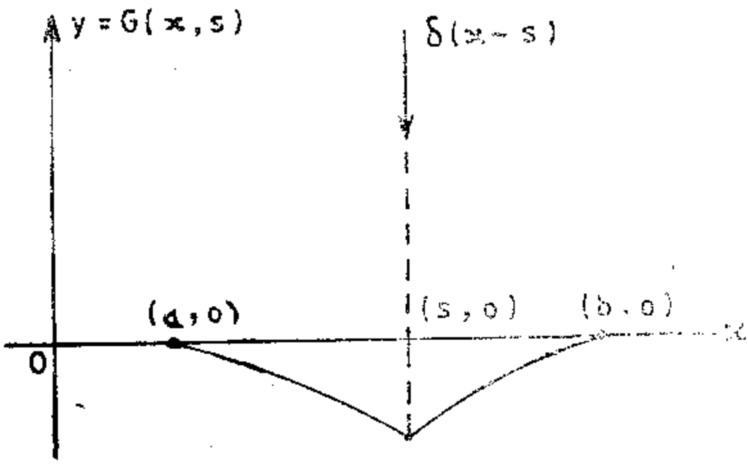
মনে করি $R(x)$, $Q(x)$ এবং $E(x)$ ফাংশনগুলি $a \leqslant x \leqslant b$ ব্যবধানের উপর অবিচ্ছিন্ন, যেখানে $R(x) > 0$ এবং $R'(x)$ উক্ত ব্যবধানের উপর অবিচ্ছিন্ন। নিম্নের প্রান্তিক সমস্যা

$$[R(x)\,y'(x)]' - Q(x)y(x) = E(x)$$

$$y(a) = y(b) = 0 \tag{১৬}$$

এর অজানা ফাংশন $y(x)$ কে আমরা কোনো দুটি খুঁটিতে আটকানো সুতার কম্পনের দিকের সাথে আড়াআড়ি সরণ বলতে পারি। অবস্থানটির বহু ধর্ম থাকতে পারে যার

মধ্যে একটি হলো, এটি প্রতি একক সুতার দৈর্ঘ্যের উপর আভ্যন্তরীণ $-Q(x)\,y(x)$ অবদান রাখে। এ ছাড়া সুতার মধ্যে পরিবর্তনশীল টান $R(x)$ রয়েছে এবং প্রতি একক সুতার দৈর্ঘ্যের উপর আড় বহির্বল $-E(x)$ কাজ করে। সুতার প্রান্তগুলি $(a, 0)$ এবং $(b, 0)$ বিন্দুতে বাঁধা আছে :



চিত্র ঃ ১১.১

সহজ সমস্যার সমাধানের মাধ্যমে (১৬) এর সমাধান নির্ণয় করার প্রচেষ্টা আমরা নিন।

মনে করি সহসা শক্তি $\delta(x-s)$ দ্বারা $E(x)$ কে সরানো হলো, যেখানে $a<s<b$। এটি $x=s$ বিন্দুতে ঋণাত্মক একক আড় শক্তি প্রয়োগের অনুরূপ। যখন সুতার উপর ভর কেন্দ্রিভূত হয় তখন সরণ $y(x)$ এর পরিবর্তে আমরা $G(x, s)$ লেখি, অর্থাৎ $y(x) = G(x, s)$। যেহেতু বামদিক থেকে ডানদিকে খাড়া শক্তি হলো $-R(x)y'(x)$, এ ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ্য করি যে $-R(x)y'(x)$ এর মান $x=s$ বিন্দুতে -1 পরিমাণ লাফ (jump) দেয়, অর্থাৎ

$$-Ry' = -1$$

অথবা
$$G_X(s+0, s) - G_X(s-0, s) = \frac{1}{R(s)} \qquad (১৭)$$

এখানে সরণ ফাংশন $G(x, s)$ বর্গাঞ্চল $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant s \leqslant b$ এর মধ্যে অবিচ্ছিন্ন হওয়া বাঞ্ছনীয়। এর অন্তরক $G_X(x, s)$ কেবল (১৭) অনুসারে লাফ অঞ্চল $x=s$ ছাড়া উক্ত অঞ্চলে অবিচ্ছিন্ন হওয়া দরকার। উল্লেখ্য যে, $x=s$ হলো উক্ত বর্গাঞ্চলের কর্ণ।

যেহেতু $x = s$ ছাড়া $\delta(x-s)$ এর মান শূন্য, কাজেই আমরা পাই

$$\left[R(x)\,G_x(x,s)\right]_x - Q(x)\,G(x,s) = 0 \tag{১৮}$$

যেখানে $x \neq s$।

অতএব $R(x)$ এবং $Q(x)$ এর উপর আরোপিত শর্তের আলোকে দেখা যায় যে, ফাংশন $G_{xx}(x, s)$ কর্ণ $x = s$ ছাড়া অবিচ্ছিন্ন। এ ছাড়া ফাংশন $G(x, s)$ প্রান্তিক শর্ত

$$G(a, s) = G(b, s) = 0 \tag{১৯}$$

পূরণ করে। কোনো ফাংশন যদি শর্ত (১৭), (১৮) এবং (১৯) পূরণ করে এবং তার সাথে অবিচ্ছিন্ন শর্তগুলিও যেভাবে দেয়া আছে তা পূরণ করে তবে উক্ত ফাংশনকে সমস্যা (১৬) এর গ্রীন ফাংশন বলে।

সমস্যা শক্তি প্রতীকের ধর্ম নিম্নরূপ :

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

এবং
$$E(x) = \int_a^b E(s)\,\delta(s-x)\,ds = \int_a^b E(s)\,\delta(x-s)\,ds$$

অর্থাৎ সহসা শক্তিগুলির উপর $E(x)$ উপরিস্থিত। যদি সমীকরণ

$$(R\,G_x)_x - QG = \delta(x-s)$$

$$G(a, s) = G(b, s) = 0$$

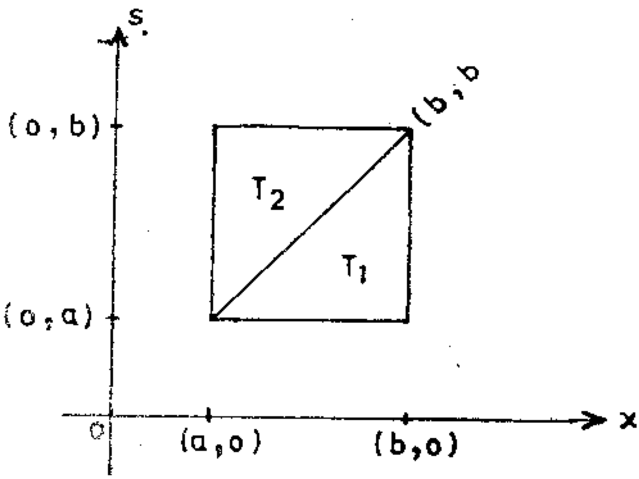
এর সকল পদকে $E(s)$ দ্বারা গুণ করার পর s এর সাপেক্ষে $s = a$ থেকে $s = b$ পর্যন্ত সমাকলন করা যায় তবে এই ফলটি সমস্যা (১৬) এর অংশ হয়, যেখানে আমরা লিখতে পারি

$$y(x) = \int_a^b E(s)\,G(x,s)\,ds = 0 \tag{২০}$$

কাজেই (১৬) এর সমাধানকে কেন্দ্রিভূত ভরের সমস্যার সমাধানের উপরিস্থিত সমাধান হিসেবে লেখা যায়।

আমরা সমাধান (৫) কে যাচাই করার জন্য দেখতে পাই যে,

$$y(a) = y(b) = 0$$



চিত্র : ১১.২

কারণ $G(x, s)$ প্রান্তিক শর্ত (১৯) সিদ্ধ করে। যখন আমরা লেখি যে,

$$y(x) = \int_0^x E(s)\, G(x, s)\, ds + \int_x^b E(s)\, G(x, s)\, ds$$

তাহলে উভয় সমাকলন ফাংশন এবং এদের প্রথম দুটি আংশিক জাতক (x এর সাপেক্ষে) ত্রিভুজ T_1 এবং T_2 এর মধ্যে x, s এর ফাংশন হবে। অতএব এখানে লিবনিজের উপপাদ্যের সাহায্যে অন্তরকরণ সম্ভব। কাজেই আমরা দেখতে পাই যেহেতু G অবিচ্ছিন্ন,

$$y'(x) = \int_a^x E(s)\, G_x(x, s)\, ds + \int_x^b E(s)\, G_x(x, s)\, ds$$

এবং আরো দেখতে পাই যে

$$(Ry')' = \int_a^b E(s)\left[R(x)\, G_x(x, s)\right]_x + E(x)\, R(x)\, J(x) \qquad (২১)$$

যেখানে $J(x) = G_x(x, x-0) - G_x(x, x+0)$ । কাজেই $J(x)$ হলো $G_x(x, s)$ এর মানের মধ্যে লম্ফ, যেখানে (x, s) বিন্দুটি ত্রিভুজ T_1 এবং T_2 এর মধ্যে কর্ণ বরাবর চলাচল করে । সমীকরণ (১৭) অনুসারে আমরা বলতে পারি

$$J(x) = \frac{1}{R(x)}$$

সমীকরণ (১৮) অনুসারে সমীকরণ (২১)-কে আমরা নিম্নোক্তভাবে লিখতে পারি :

$$(Ry')' = Q(x)\int_a^b E(s)\,G(x, s)\,ds + E(x)$$

$$= Q(x)y(x) + E(x)$$

অর্থাৎ $y(x)$ অন্তরক সমীকরণ (১৬)-কে সিদ্ধ করে ।

অতএব সমস্যা (১৬) এর সমাধান (২০) প্রতিষ্ঠিত হবে যদি গ্রীন ফাংশন $G(x, s)$ এর অস্তিত্ব থাকে ।

১১.৪ গ্রীন ফাংশন গঠন

মনে করি প্রারম্ভিক-মান সমস্যা

$$\left.\begin{aligned} &[R(x)\,u'(x)]' - Q(x)\,u(x) = 0 \\ &u(a) = 0\ ,\ u'(a) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (২২)$$

এর অদ্বিতীয় সমাধান হলো $u(x)$ যেখানে R, R' এবং Q অবিচ্ছিন্ন এবং $R > 0$, $a < x < b$ । মনে করি $v(x)$ হলো প্রারম্ভিক-মান সমস্যা

$$\left.\begin{aligned} &[R(x)\,v'(x)]' - Q(x)\,v(x) = 0 \\ &v(b) = 0\ ,\ v'(b) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (২৩)$$

এর সমাধান । যদি বর্গ $a \leq x \leq b$, $a \leq s \leq b$ এর মধ্যে (x, s) যে কোনো বিন্দু হয় তাহলে ফাংশন

$$\left.\begin{aligned} G(x, s) &= A(s)\,u(x),\ (x < s) \\ &= B(s)\,v(x)\ ,\ (x > s) \end{aligned}\right\} \qquad (২৪)$$

প্রান্তিক শর্ত $G(a, s) = G(b, s) = 0$ সিদ্ধ করে । এটি $x = s$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন এবং এর জাতকের G_x, সমীকরণ (১৭) মোতাবেক লম্ফ থাকবে যদি A এবং B অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয় যা নিচের সমকালীন সমীকরণগুলিকে সিদ্ধ করে :

$$\left.\begin{aligned} B(s)\ v(s) - A(s)\ u(s) &= 0 \\ B(s)\ v'(s) - A(s)\ u'(s) &= \frac{1}{R(s)} \end{aligned}\right\} \qquad (২৫)$$

এই গুচ্ছের নির্ণায়ক $u(s)\ v'(s) - v(s)\ u'(s)$ নিচের অভেদ

$$\frac{d}{ds}\left[(uv' - vu')\ R\right] = \left[(Rv')' - Qv\right]u - \left[(Ru')' - Qu\right]v$$

কে সিদ্ধ করে। এখন অন্তরক সমীকরণ (২২) এবং (২৩) অনুসারে উক্ত অভেদের ডানপক্ষ শূন্য হয়ে যায়। কাজেই $(uv' - u'v)R =$ ধ্রুবক। অথবা

$$\left[u(s)\ v'(s) - u'(s)\ v(s)\right] R(s) = \text{ধ্রুবক}$$
$$= \left[u(b)\ v'(b) - u'(b)\ v(b)\right] R(b)$$

যেহেতু $v(b) = 0$ এবং $v'(b) = 1$, অতএব আমরা উপরিউক্ত সমীকরণ থেকে পাই

$$R(s)\left[u(s)\ v'(s) - v(s)\ u'(s)\right] = R(b)\ u(b) \qquad (২৬)$$

যদি $u(b) \neq 0$ হয় তাহলে গুচ্ছ (২৫) এর সমাধান হবে

$$A(s) = \frac{v(s)}{R(b)\ u(b)}\ ,\ B(s) = \frac{u(s)}{R(b)\ u(b)}$$

কাজেই গ্রীন ফাংশনের সূত্র (২৪) দাঁড়ায়

$$G(x, s) = \frac{u(x)\ v(s)}{R(b)\ u(b)} \text{ যখন } x \leqslant s \qquad (২৭)$$
$$= \frac{u(s)\ v(x)}{R(b)\ u(b)} \text{ যখন } x \geqslant s$$

এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে, ফাংশন $G(x, s)$ প্রতিসম (symmetric) :

$$G(x, s) = G(s, x) \qquad (২৮)$$

যদি $u(b) = 0$ হয় তবে, যেহেতু $u(a) = 0$, $u'(a) = 1$, ফাংশন $w = u(x)$ অভিন্নভাবে শূন্য নয় এবং এটি সমজাতীয় সমীকরণ

$$(Rw')' - Qw = 0,\ w(a) = w(b) = 0 \qquad (২৯)$$

কে সিদ্ধ করে।

উপরিউক্ত সমস্যা ও তার সমাধানের আলোকে নিচের উপপাদ্যটি ইতিমধ্যেই প্রমাণ হয়ে গেছে।

উপপাদ্য ১

যদিও সমজাতীয় সমস্যা (২৯) এর $w(x) = 0$ ছাড়া অন্য কোনো সমাধান না থাকে, তাহলে সমস্যা

$$\left.\begin{aligned} &[R(x)\,y'(x)]' - Q(x)\,y(x) = E(x) \\ &y(a) = y(b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (৩০)$$

এর জন্য গ্রীন ফাংশন $G(x, s)$ বর্তমান থাকে যেখানে R, R' এবং Q অবিচ্ছিন্ন, E ছেদাংশে অবিচ্ছিন্ন এবং $R > 0$ যখন $a \leqslant x \leqslant b$।

দ্রষ্টব্য

(ক) গ্রীন ফাংশন প্রারম্ভিক-মান সমস্যা (২২) এবং (২৩) এর সমাধানের মাধ্যমে বর্ণনা করা হয়।

(খ) গ্রীন ফাংশনের সূত্র হলো (২৭) যা x এবং s এর জন্য সামঞ্জস্যপূর্ণ।

(গ) সমস্যা (৩০) এর অবিচ্ছিন্ন সমাধান হলো

$$y(x) = \int_a^b E(s)\, G(x, s)\, ds \qquad (৩১)$$

যার অবিচ্ছিন্ন জাতক আছে।

অদ্বিতীয় সমাধান ঃ এখানে আরো একটি বিষয় উল্লেখ করা যেতে পারে যে, সূত্র (৩১) এর ফাংশন $y(x)$ ছাড়া যদি আর একটি ফাংশন $z(x)$ সমস্যা (৩০) এর যাবতীয় শর্ত পালন করে তাহলে $w = y - z$ ফাংশনটি সমীকরণ (২৯) কে সিদ্ধ করে। যেহেতু $w(x) = 0$, ফলে আমরা পাই $z(x) = y(x)$। কাজেই সমাধান $y(x)$ হলো অদ্বিতীয়। এ সম্পর্কে নিম্নের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হয়ে যায়।

উপপাদ্য ২

উপপাদ্য ১ এর যাবতীয় শর্তে প্রান্তিক-মান সমস্যা (৩০) এর সমাধান (৩১) কেবল একটি, যেখানে $y(x)$ এবং $y'(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

এটি উল্লেখ করা যেতে পারে যে, সমজাতীয় সমস্যা (২৯) এর সমাধান মনে করি $w(x) = z(x)$ যা অভিন্নভাবে শূন্য নয় এবং $y(x)$ সমস্যা (৩০) এর যাবতীয় শর্ত সিদ্ধ করে। তাহলে অভেদ (৭) থেকে পাওয়া যায়

$$E(x)\,z(x) = \frac{d}{dx}\left[(zy' - yz')\,R\right]$$

কাজেই আমরা এ থেকে সমাকলন করে পাই

$$\int_a^b E(x)\, z(x)\, dx = \Big[(zy' - yz')R \Big]_a^b = 0 \qquad (৩২)$$

অতএব বলা যায় যে যদি সমস্যা (৩০) এর সমাধান থাকে তবে ব্যবধান (a, b) এর মধ্যে $E(x)$ এবং $z(x)$ উল্লাম্বিক ফাংশন হবে।

২১.৫ সমজাতীয় আইগেন-মান সমস্যা

সমজাতীয় প্রান্তিক-মান সমস্যা

$$[R(x)y'(x, h)]' - [q(x) + hp(x)]\, y(x, h) = 0, \quad (a < x < b)$$

$$A_1 y(a, h) + A_2 y'(a, h) = 0$$

$$B_1 y(b, h) + B_2 y'(b, h) = 0 \qquad (৩৩)$$

যার মধ্যে একটি বিশেষ চলক h আছে, তাকে স্টার্ম-লিওভিলি সমস্যা বলে। উক্ত সমস্যার মধ্যে ধ্রুবক A_1, A_2, B_1, B_2 বাস্তব এবং h এর উপর অনির্ভরশীল। ফাংশন p, q, R এবং R' হলো বাস্তব মানসম্পন্ন এবং পুরা ব্যবধান $a \leqslant x \leqslant b$ এর উপর অবিচ্ছিন্ন এবং $p > 0$, $R > 0$।

ধ্রুবক h এর যে কোনো মানের জন্য সমস্যা (৩৩) এর নিম্নমান সম্পন্ন শূন্য সমাধান $y = 0$ আছে। কিন্তু h এর কতকগুলি নিশ্চিত মানের জন্য, মনে করি $h = k_n$, উক্ত সমস্যার অশূন্য সমাধান

$$y(x, h) = y(x, k_n) = y_n(x)$$

পাওয়া যায়। এখানে k_n কে আইগেন মান এবং $y(x, k_n)$ কে আইগেন ফাংশন বলে। উল্লেখ করা যেতে পারে যে, যখন h এর মান k_m এবং k_n তখন সমীকরণ (৩৩) এর সমাধান হবে $y = y_m(x)$ এবং $y = y_n(x)$। এছাড়াও যদি $y = y_n(x)$ সমীকরণ (৩৩) এর সমাধান হয় তবে $y = C\, y_n(x)$ উক্ত সমীকরণের একটি সমাধান হবে যেখানে C কোনো অশূন্য ধ্রুবক। কাজেই স্টার্ম-লিওভিলি সমস্যা হলো বিশেষ ধরনের আইগেন মান সমস্যা।

সমীকরণ (৩৩) এর যদি দুটি আইগেন ফাংশন $y_m(x)$ এবং $y_n(x)$ থাকে যেখানে,

$$(Ry_m')' = (q + k_m p)\, y_m$$

$$(Ry_n')' = (q + k_n p)\, y_n$$

তবন উক্ত সমীকরণ দুটি থেকে q অপসারণ করলে পাওয়া যায়

$$(k_m - k_n)\, p y_m y_n = (R y_m')' y_n - (R y_n')' y_m$$

স্বযুক্ত আকারবশত এর ডানপক্ষ হলো $(R y'_m y_n - R y_n' y_m)$ এর অন্তরক।

কাজেই আমরা পাই

$$(k_m - k_n) \int_a^b p(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = \Big[(y_m' y_n - y_n' y_m) R \Big]_a^b \qquad (৩৪)$$

এর শেষ পদটিকে আমরা নিম্নরূপে লিখতে পারি :

$$R(a) \begin{vmatrix} y_m(a) & y_m'(a) \\ y_n(a) & y_n'(a) \end{vmatrix} - R(b) \begin{vmatrix} y_m(b) & y_m'(b) \\ y_n(b) & y_n'(b) \end{vmatrix} \qquad (৩৫)$$

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে প্রত্যেক আইগেন ফাংশন সমস্যা (৩৩) এর প্রান্তিক শর্তগুলি সিদ্ধ করে। কাজেই আইগেন ফাংশনগুলির উপর আমরা শর্তগুলি ব্যবহার করতে পারবো।

এখন (৩৩) এর প্রথম শর্ত থেকে আমরা পাই

$$A_1 y_m(a) + A_2 y_m'(a) = 0$$

$$A_1 y_n(a) + A_2 y_n'(a) = 0$$

এটি হতে A_1 এবং A_2 অপসারণ করে পাওয়া যায় :

$$\begin{vmatrix} y_m(a) & y_m'(a) \\ y_n(a) & y_n'(a) \end{vmatrix} = 0$$

আবার দ্বিতীয় শর্ত থেকে পাওয়া যায় :

$$B_1 y_m(b) + B_2 y_m'(b) = 0$$

$$B_1 y_n(b) + B_2 y_n'(b) + 0$$

এ থেকেও B_1 এবং B_2 অপসারণ করলে দাঁড়ায়

$$\begin{vmatrix} y_m(b) & y_m'(b) \\ y_n(b) & y_n'(b) \end{vmatrix} = 0$$

ফলে (৩৫) এর উভয় নির্ণায়ক শূন্য হয়ে যায়। কাজেই সমীকরণ (৩৪) থেকে পাওয়া যায় :

$$(k_m - k_n) \int_a^b p(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = 0 \qquad (৩৬)$$

যদিও $k_m \neq k_n$ হয়, তবে

$$\int_a^b p(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = 0 \qquad (৩৭)$$

কাজেই যখন $k_m \neq k_n$ তখন আইগেন ফাংশন ভারবত্তা ফাংশন $P(x)$ সহ ব্যবধান (a, b) এর উপর উল্লাম্বিক।

যদি h জটিল সংখ্যা হয়, মনে করি $h = \alpha + i\beta$, তাহলে আইগেন ফাংশন $y(x, h)$ জটিল মানের ফাংশন হতে পারে। যখন সমস্যা (৩৩) এর সকল পদের জটিল যুগল বিবেচনা করা যায় তখন দেখা যায় যে,

$$(R\bar{y}')' - (q + \bar{h}\, p)\, \bar{y} = 0$$

$$A_1 \bar{y}(a, h) + A_2 \bar{y}'(a, h) = 0$$

$$B_1 \bar{y}(b, h) + B_2 \bar{y}'(b, h) = 0$$

কাজেই যখন আইগেন মান $\bar{h} = \alpha - i\beta$ তখন তার সংশ্লিষ্ট আইগেন ফাংশন হলো $\bar{y}(x, h)$। ফলে (৩৬) অনুসারে আমরা পাই

$$(h - \bar{h}) \int_a^b p(x)\, y(x, h)\, \bar{y}(x, h)\, dx = 0$$

এখানে $p(x) > 0$ এবং $y\bar{y} = |y|^2$, যেখানে $y(x, h)$ অভিন্নভাবে শূন্য নয়। কাজেই দেখা যায় যে

$$h - \bar{h} = 0 \quad \text{বা,} \quad \alpha + i\beta - \alpha + i\beta = 0 \quad \text{বা,} \quad \beta = 0$$

অর্থাৎ h হলো বাস্তব সংখ্যা। অতএব যদি $y(x, h)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হয় তবে সমাকলনের ধনাত্মক মান পাওয়া যাবে।

অতএব প্রত্যেক আইগেন ফাংশন $y(x, h)$ হলো সমস্যা (৩৩) এর সমাধান যখন সমীকরণ (৩৩) এর সহগগুলি বাস্তব, ফলে একে বাস্তব মানসম্পন্ন ফাংশন বিবেচনা করা যাবে।

অবিচ্ছিন্ন আইগেন ফাংশনের অস্তিত্ব ধরে নিলে নিম্নোক্ত উপপাদ্যটি ইতিমধ্যে প্রমাণ হয়ে গেছে

উপপাদ্য ৩

স্টার্ম-লিওভিলি সমস্যা (৩৩) এর আইগেন মান k_n বাস্তব এবং আইগেন ফাংশন $y_n(x)$ উলম্বিক শর্ত (৩৭) সিদ্ধ করে।

ধনাত্মক সংখ্যা $\|y_n\|$, যখন

$$\|y_n\|^2 = \int_a^b p(x)\,[\,y_n(x)\,]^2\,dx \qquad (৩৮)$$

তখন ভারবহ ফাংশন $p(x)$ সহ ফাংশন $y_n(x)$ এর আদর্শ হলো $\|y_n\|$। নিয়মিকৃত আইগেন ফাংশনগুলি

$$\psi_n(x) = \frac{y_n(x)}{\|y_n\|}, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots \cdots) \qquad (৩৯)$$

ব্যবধান (a, b) এর উপর অর্থনরমাল

$$\int_a^b p(x)\,\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \qquad (৪০)$$

মনে করি যে, কোনো ফাংশন $f(x)$-কে অর্থনরমাল ফাংশন $\psi_r(x)$ এর সিরিজে প্রকাশ করতে হবে। অর্থাৎ

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} C_r\,\psi_r(x), \quad (a < x < b) \qquad (৪১)$$

এখন (৪১) এর সকল পদকে $p(x)\,\psi_m(x)$ দ্বারা গুণ করে সমাকলন করার জন্য (৪০) ব্যবহার করলে দেখতে পাই যে,

$$C_m = \int_a^b f(x)\,p(x)\,\psi_m(x)\,dx \qquad (৪২)$$

যখন $m = 1, 2, 3, \cdots \cdots$

অর্থনরমাল ফাংশন $\psi_m(x)$ এর যোগ সূত্রে ধ্রুবক C_m হলো ফাংশন $f(x)$ এর জন্য ফুরিয়ার সহগ। সিরিজ (৪১)-কে সর্বজনীন ফুরিয়ার সিরিজ বলে।

১১.৬ আইগেন-মান সমস্যা

মনে করি প্রদত্ত আইগেন-মান সমস্যাটি হলো

$$Z''(x, h) - [\, h + q(x) \,]\, Z(x, h) = 0 \tag{৪৩}$$

$$Z(0, h) = Z(1, h) = 0$$

আমরা একটি আংশিক অন্তরক সমীকরণের প্রান্তিক-মান সমস্যা বিবেচনা করবো যার সাথে সমীকরণ (৪৩) এর সমাধানের সম্পর্ক আছে। মনে করি দুটি বিন্দু (0, 0) এবং (1, 0)-তে দুটি খুঁটির সাথে সুতা টাংগানো আছে যার তরঙ্গের আড় দূরত্ব হলো $y(x, t)$। মনে করি সুতা স্থির অবস্থা থেকে কম্পন শুরু করে যার প্রারম্ভিক আড় দূরত্ব হলো $y(x, t) = f(x)$। ফলে আমরা পাই

$$y_{tt}(x, t) = y_{xx}(x, t) - q(x)\, y(x, t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$

$$y(0, t) = y(1, t) = y_t(x, 0) = 0, \quad y(x, 0) = f(x) \tag{৪৪}$$

উক্ত অন্তরক সমীকরণ এবং তিনটি প্রান্তিক শর্ত সমজাতীয়। কাজেই (৪৪) এর জন্য চলক পৃথকীকরণ পদ্ধতি অনুসরণ করা যাবে। তার সমাধানের জন্য মনে করি

$$y(x, t) = X(x)\, T(t) \tag{৪৫}$$

এটি সমীকরণ (৪৪)-এ বসিয়ে আমরা পাই

$$XT'' = X''T - qXT \tag{৪৬}$$

$$X(0) = X(1) = T'(0) = 0$$

এখন (৪৬)-কে XT দিয়ে ভাগ করে পাওয়া যায়

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - q(x)\, X(x)}{X(x)} = k \tag{৪৭}$$

যেখানে k হলো ধ্রুবক। কারণ বামপক্ষ কেবল t এর ফাংশন এবং ডানপক্ষ শুধু x এর ফাংশন। ফলে (৪৭) থেকে পাওয়া যায়

$$X''(x) - [k + q(x)]X(x) = 0 \tag{৪৮}$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

যা প্রদত্ত সমীকরণ (৪৩) এর একইরূপ

যেখানে $$X(x) = Z(x), \quad k = h$$

এবং $$T''(t) - kT(t) = 0 \tag{৪৯}$$

$$T'(0) = 0$$

কাজেই h হলো স্টার্ম-লিওভিলি সমস্যার আইগেন মান $k = k_n$ এবং ধ্রুবক উৎপাদক ছাড়া $X(x) = Z(x)$ হলো সংশ্লিষ্ট অর্থনরমাল আইগেন ফাংশন $\psi_n(x)$। ফাংশন $T(t)$ (৪৯)-কে সিদ্ধ করে, যেখানে $k = k_n$ আইগেন মান। কাজেই (৪৪) এর সমাধান $y(x, t)$ নিম্নোক্তভাবে লেখা যাবে:

$$y(x, t) = X(x)\,T(t) = C_n\, \psi_n(x) \cos t\sqrt{-k_n} \tag{৫০}$$

যেখানে C_n হলো ধ্রুবক $(n = 1, 2, 3, \cdots \cdots)$।

সমাধান (৫০) এর যোগফল (৪৪) এর সমজাতীয় শর্তগুলি পূরণ করে। ফলে আমরা পাই

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, \psi_n(x) \cos t\sqrt{-k_n} \tag{৫১}$$

যা $y(x, 0) = f(x)$ সহ প্রদত্ত সমস্যার সকল শর্ত পূরণ করে, যেখানে C_n হলো ফাংশন $f(x)$ এর অর্থনরমাল ফাংশন $\psi_n(x)$ এর যোগসূত্রে ফুরিয়ার সহগ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, \psi_n(x)\,, \quad 0 < x < 1 \tag{৫২}$$

যখন $$C_n = \int_0^1 f(x)\, \psi_n(x)\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{৫৩}$$

কাজেই সমস্যা (৪৪) এর পূর্ণ সমাধানের জন্য স্টার্ম-লিওভিলি বিস্তার (৫২) আবশ্যকীয়।

১১.৭ দেওয়ালে অবিচলিত তাপমাত্রা

মনে করি $u(x, y)$ হলো একটি দেওয়ালের তাপমাত্রা, দেওয়ালটি $x = 0$, $x = 1$ এবং $y = 0$ তল দ্বারা সীমাবদ্ধ। মনে করা যাক এর $x = 0$ তলটি তাপ নিরোধক এবং $x = 1$ তল হতে তাপ নির্গত হতে পারবে এবং $y = 0$ তলটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রা

$F(x)$-তে রয়েছে। কাজেই প্রান্তিক শর্ত সমস্যাটি দাঁড়ায়

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \; (0 < x < 1, \; y > 0) \qquad (৫৪)$$

$$u_x(0, y) = 0, \; u_x(1, y) = -hu(1, y), \; (y > 0) \qquad (৫৫)$$

$$u(x, 0) = F(x), \; \underset{y \to \infty}{\text{Lt}} u(x, y) = 0, \; (0 < x < 1) \qquad (৫৬)$$

যে ধ্রুবক h ধনাত্মক এবং $F(x)$ নির্দিষ্ট।

উক্ত সমস্যা সমাধানের জন্য চলক পৃথকীকরণ পদ্ধতি অনুসরণ করা হবে। ধরে নেই করি

$$u(x, y) = X(x)\, Y(y) \qquad (৫৭)$$

তাহলে সমীকরণ (৫৪) দাঁড়ায়

$$X''(x)\, Y(y) + X(x)\, Y''(y) = 0$$

অথবা
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k \qquad (৫৮)$$

এখানে ধ্রুবক k চলক x এবং y এর উপর অনির্ভরশীল $X(x)$ প্রদত্ত সমজাতীয় শর্তগুলি সিদ্ধ করবে যদি এটি স্টার্ম-লিওভিলি সমস্যা

$$X''(x) - k\, X(x) = 0 \qquad (৫৯)$$

$$X'(0) = 0, \; h\, X(1) + X'(1) = 0$$

এর সমাধান হয় এবং $Y(y)$ শর্ত

$$Y''(x) + k\, Y(y) = 0 \qquad (৬০)$$

$$\underset{y \to \infty}{\text{Lt}} Y(y) = 0$$

সিদ্ধ করে।

যখন $k = 0$ তখন অন্তরক সমীকরণ (৫৯) এর সাধারণ সমাধান হলো

$$X(x) = Ax + B$$

এটি প্রদত্ত দুটি প্রান্তিক শর্ত সিদ্ধ করবে যদি $A = B = 0$ হয়, তবে শূন্য একটি আইগেন মান নয়। যখন $k \neq 0$ তখন (৫৯) এর সমাধান হলো

$$X(x) = C \cosh x\sqrt{k}$$

যা প্রথম দুটি শর্ত সিদ্ধ করে। এটি তৃতীয় শর্ত সিদ্ধ করবে যদি

$$h \cosh \sqrt{k} + \sqrt{k} \sinh \sqrt{k} = 0 \qquad (৬১)$$

কিন্তু সকল আইগেন মান হলো বাস্তব। যদি $k > 0$ হয়, তবে $\cosh \sqrt{k} > 0$ হবে। তখন সমীকরণ (৬১) দাঁড়াবে

$$\tanh \sqrt{k} = -\frac{h}{\sqrt{k}}$$

যেহেতু ফাংশন $\tanh 0$ এবং $-h/0$ এর লেখচিত্রগুলি কোথাও ছেদ করে না। অতএব সমীকরণের কোনো সমাধান নেই। কাজেই সমস্যা (৫৯) এর সকল আইগেন মানগুলি ঋণাত্মক।

এখন আমরা আইগেই মান k এর পরিবর্তে লেখতে পারি

$$k = -a_n^2$$

তাহলে সমীকরণ (৬১) হতে পাওয়া যায়

$$\tan a = \frac{h}{a} \tag{৬২}$$

যে সমীকরণের অসীম সংখ্যক মূল $\pm a_n (n = 1, 2, \cdots \cdots)$ আছে। প্রকৃতপক্ষে n এর মান বড় হলে a_n এর মান $n\pi$ এর চেয়ে সামান্য বেশি হবে।

সমস্যা (৫৯) এর সর্বমোট আইগেন মানের সেট হলো

$$k_n = -a_n^2, \; (n = 1, 2, 3, \cdots \cdots)$$

যেখানে a_n হলো সমীকরণ (৬২) এর ধনাত্মক মূল এবং সংশ্লিষ্ট আইগেন ফাংশনগুলি হবে

$$X_n(x) = \cos a_n x \tag{৬৩}$$

মনে করি, আদর্শ মানের সংজ্ঞা অনুসারে

$$b_n = \| X_n(x) \|$$

হলো $X_n(x)$ এর আদর্শ মান। তাহলে আমরা পাই

$$b_n^2 = \int_0^1 \cos^2 a_n x \, dx = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin a_n \cos a_n}{a_n}\right)$$

অথবা $$b_n = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin a_n \cos a_n}{a_n}\right)\right]} \tag{৬৪}$$

যেহেতু a_n হলো সমীকরণ (৬২) এর মূল। অতএব সমস্যা (৫৯) এর অর্থনরমাল আইগেন ফাংশন হলো

$$\psi_n(x) = \frac{1}{b_n} \cos a_n x,\ (n = 1,\ 1,\ 3,\ \cdots\cdots) \tag{৬৪}$$

যখন $k = -a_n^2$ তখন সমীকরণ (৬০) এর সমাধান হলো

$$Y(y) = c_n e^{-a_n y} \tag{৬৬}$$

যখন c_n হলো কোনো ধ্রুবক। অতএব প্রদত্ত সমস্যার সমাধান হলো

$$u(x, y) = X(x)\ Y(y)$$

$$= c_n \frac{\cos a_n x e^{-a_n y}}{b_n},\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots) \tag{৬৭}$$

এদের যোগফল প্রদত্ত সমজাতীয় শর্তগুলি সিদ্ধ করে কিন্তু যতক্ষণ পর্যন্ত $F(x)$ ফাংশন $\cos a_n x$ এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশ না হবে ততক্ষণ কোনো সসীম যোগফল শর্ত

$$u(x, 0) = F(x),\ (0 < x < 1) \tag{৬৮}$$

কে সিদ্ধ করবে না। সিরিজ

$$u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n} \cos a_n x e^{-a_n y} \tag{৬৯}$$

সমজাতীয় শর্তগুলিকে সিদ্ধ করে।

অথবা $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n} \cos a_n x\ (0 < x < 1) \tag{৭০}$$

যখন c_n হলো ফুরিয়ার সহগ

$$c_n = \int_0^1 F(x)\ \psi_n(x)\ dx = \frac{1}{b_n} \int_0^1 F(x) \cos a_n x\ dx \tag{৭১}$$

এখানে উল্লেখ করা যেতে পারে যে, সিরিজ (৭০) হলো ফাংশন $F(x)$ এর জন্য সর্বজনীন ফুরিয়ার সিরিজ। অতএব প্রদত্ত সমস্যার সাধারণ সমাধান হলো

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b_n} e^{-a_n y} \cos a_n x \tag{৭২}$$

যেখানে ধ্রুবক b_n এবং c_n যথাক্রমে সূত্র (৬৪) এবং (৭১) হতে নির্ণয় করা যাবে।

১১.৮ গ্রীন ফাংশন নির্ণয়

(ক) **সীমানাবিহীন অঞ্চলে তাপ পরিচালন :** তাপ পরিচালন সমীকরণ

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2 u+\frac{f}{c\rho} \tag{৭৩}$$

এর সমাধান নির্ণয় করতে হবে যখন এটি প্রারম্ভিক শর্ত

$$u(x, y, z, 0)=\phi(x, y, z) \tag{৭৪}$$

সিদ্ধ করে। উপরোক্ত সমীকরণে f হলো তাপ উৎসের ঘনত্ব, $a^2=k/c\rho$, যেখানে c নির্দিষ্ট তাপ, ρ ঘনত্ব এবং k তাপ পরিচালন। উক্ত সমীকরণের সমাধানটি মনে করি

$$u=u_1+u_2$$

যেখানে u_1 হলো (৭৩) এর সুষম (homogeneous) সমীকরণের সমাধান এবং u_2 হলো অসম (inhomogeneous) সমীকরণের সমাধান। এ ধরনের সমস্যার সমাধানের জন্য গ্রীন ফাংশন নির্ণয় করাই যথেষ্ট হবে।

মনে করি সুষম সমীকরণ (পোলার স্থানাঙ্ক)

$$\nabla^2 u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

এর সমাধান r এবং t এর উপর নির্ভরশীল। তাহলে ফাংশন, যেখানে

$$u=u(r, t),$$

$$v=ru$$

নিম্নোক্ত সমীকরণ সিদ্ধ করে :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{৭৫}$$

মূল বিন্দুতে একটি অনবরত জীবন্ত তাপ উৎস আছে যার ধ্রুবক শক্তি হলো q এবং অবশিষ্ট জায়গায় প্রারম্ভিক তাপ শূন্য :

$$u(r, 0)=0 \quad \text{যখন } r\neq 0$$

এখন $r=0$-তে তাপ উৎসের উপস্থিতি নির্দেশ করে যে, একক সময়ে কোনো গোলক s_ϵ এর মধ্য দিয়ে নির্গত তাপ q এর সমান, যেখানে গোলকের ব্যাসার্ধ $\epsilon\to 0$ এবং এর কেন্দ্র $r=0$ তে অবস্থিত। অর্থাৎ,

$$\underset{e \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[-\iint_{S_e} k \frac{\partial u}{\partial n} ds \right] = q$$

যেহেতু গোলকীয় সদৃশতার কারণে উষ্ণামিক জাতক $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ ধ্রুবক, কাজেই আমরা $e \to 0$ এর জন্য পাই

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \iint_{S_e} ds = -k \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 \Big|_{r=e} \to q$$

অথবা $$\frac{\partial u}{\partial r} \to -\frac{q}{4\pi kr^2}, \quad r \to e, \quad e \to 0$$

এর অর্থ এই যে, $r = 0$-তে $\frac{\partial u}{\partial r}$ এর সিংগুলারিটি (singularity) রয়েছে। তাকে r এর সাপেক্ষে সমাকলন করে আমরা পাই

$$u(r, t) \to \frac{q}{4\pi kr}$$

যা থেকে দেখা যায় যে ফাংশন $u(r, t)$ এর $r = 0$ তে সিংগুলারিটি রয়েছে।
যদি আমরা $ur = v$ লেখি তাহলে এটি প্রমাণ করে যে

$$v \to \frac{q}{4\pi k}$$

যা $r = 0$ তে সীমিত।

এখন সমীকরণ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$v(0, t) = \frac{q}{4\pi k} = v_0$$

$$v(r, 0) = 0 \qquad (৭৬)$$

এর সমাধান হিসেবে ফাংশন v-কে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়:

$$v(r, t) = v_0 \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r/2\sqrt{a^2 t}}^{\infty} e^{-y^2} dy \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi k} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r/2\sqrt{a^2t}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

ফলে q শক্তির জীবন্ত উৎস যা $r = 0$ তে অবস্থিত তার তাপ পরিচলন সমীকরণের সমাধান হলো

$$u(r, t) = qw(r, t) = \frac{q}{4\pi k} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{r/2\sqrt{a^2t}}^{\infty} e^{-y^2}\, dy \qquad (৭৭)$$

যেখানে $w(r, t)$ হলো একক শক্তির $(q = 1)$ উৎসের প্রেক্ষিতে তাপমাত্রা।

এখন জীবন্ত তাপ শক্তির উৎসের পরিপ্রেক্ষিতে মনে করি q শক্তির উৎস (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে অবস্থিত যা τ সময়ে অনবরত কাজ করে। এ রকম তাপ উৎস অপর দুটি তাপ উৎসের সমতুল যাদের শক্তি যথাক্রমে $+q$ এবং $-q$ এবং একটি কাজ করে $t = 0$ তে, অপরটি কাজ করে $t = \tau$ তে। কাজেই তাপমাত্রা এ পর্যায়ে দাঁড়ায়

$$u(r, t) = q[W(r, t) - W(r, t - \tau)]$$

যদি τ সময়ে তাপ $Q = q\tau$ মুক্ত হয়ে যায় তবে আমরা পাই

$$u(r, t) = \frac{Q}{\tau}\left[W(r, t) - W(r, t - \tau)\right]$$

যদি $\tau \to 0$ হয় এবং তখনও Q ধ্রুবক থাকে, তবে

$$u_0(r, t) = \operatorname*{Lt}_{\tau \to 0} u(r, t) = Q\frac{\partial W}{\partial t}$$

$$= \frac{Q}{4\pi kr} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2/4a^2t} \cdot \frac{r}{4\sqrt{a^2t^3}} a^2$$

অথবা $$u_0(a, t) = \frac{Q}{cP} G(x, y, z, t;\, x_1, y_1, z_1)$$

যেখানে $G(x, y, z, t;\, x_1, y_1, z_1)$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]/4a^2t} \qquad (৭৮)$$

এখানে $G(x, y, z, t ; x_1, y_1, z_1)$ কে তাপ উৎসের গ্রীন ফাংশন বলে। এটি t সময়ে (x, y, z) বিন্দুতে তাপমাত্রা নির্দেশ করে যা $t = 0$ তে $Q \cdot cp$ শক্তির উৎস থেকে উৎপন্ন।

এটি থেকে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t ; x_1, y_1, z_1)\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = 1 \qquad (৭৯)$$

এই সমাকলনকে তিনটি সমাকলনে প্রকাশ করা যায় যার প্রতিটির মান একক :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-(x-x_1)^2/4a^2t}\, dx_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2}\, dp = 1$$

যেখানে $p = \dfrac{x_1 - x}{2\sqrt{a^2 t}}$

সমীকরণ (৭৯) থেকে দেখা যায় যে, গ্রীন ফাংশন G সদৃশ :

$$G(P, P_1) = G(P_1, P), \text{ অর্থাৎ}$$

$$G(x, y, z, t ; x_1, y_1, z_1) = G(x_1, y_1, z_1, t ; x, y, z)$$

এটি একটি বিপরীতযোগ্য ধর্ম। অর্থাৎ (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে অবস্থিত কোনো উৎসের জন্য (x, y, z) বিন্দুতে যে ক্রিয়া তা (x, y, z) বিন্দুতে অবস্থিত একই উৎসের জন্য (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে ক্রিয়ার সমান। কিন্তু চলক t এর জন্য এই সদৃশতা প্রযোজ্য নয়। ফলে, সময়ের সাথে তাপ প্রবাহ বিপরীতমুখী নয়।

(খ) দুই চলকবিশিষ্ট গ্রীন ফাংশন : এক্ষেত্রে আমরা z-অক্ষের সমান্তরাল এবং (x_1, y_1) বিন্দুর মধ্যে দিয়ে অতিক্রান্ত একটি সরলরেখা বিবেচনা করি। এই সরলরেখার উপর একটি অসীম লম্বা রৈখিক উৎস ধরে নিতে পারি যার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের শক্তি হলো $Q =$ ধ্রুবক। এ রকম উৎসের গ্রীন ফাংশন G_2 চলক z এর উপর নির্ভর করে না। কেবল x, y তলের উপর এর মান নির্ণয় করা যাবে। এক্ষেত্রে dz_1 এর মধ্য দিয়ে প্রবাহিত তাপ হলো

$$dQ = Q_1\, dz_1$$

তাহলে উক্ত জায়গায় তাপমাত্রা হবে

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1 dz_1}{c\rho} G(x, y, z, t; x_1, y_1, z_1)$$

কিন্তু
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z-z_1)^2/4a^2t} dz_1$$

$$= 2\sqrt{a^2t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2} dp = 2\sqrt{\pi a^2 t}$$

যেখানে $p = \dfrac{z_1 - z}{2\sqrt{a^2t}}$

ফলে আমরা পাই

$$\bar{u} = \frac{Q_1}{c\rho} G_2$$

যেখানে গ্রীন ফাংশন G_2 হলো :

$$G_2(x, y, t; x_1, y_1)$$
$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^2 e^{-[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]/4a^2t} \qquad (৮০)$$

(গ) এক চলকবিশিষ্ট গ্রীন ফাংশন : এক্ষেত্রেও একই নিয়মে গ্রীন ফাংশন নির্ণয় করা যাবে। যদি আমরা ধরে নিই যে, একটি অসীম তলীয় উৎস আছে যার ঘনত্ব $Q =$ ধ্রুবক। তাহলে পাওয়া যায় :

$$\bar{\bar{u}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_2 dy_1 dz_1}{c\rho} G(x, y, z, t; x_1, y_1, z_1)$$

$$= \frac{Q_2}{c\rho} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-(x-x_1)^2/4a^2t}$$

$$= \frac{Q_2}{c\rho} G_1(x, t; x_1)$$

যেখানে গ্রীন ফাংশন G_1 হলো :

$$G_1(x, t; x_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-(x-x_1)^2/4a^2t} \qquad (৮১)$$

(ঘ) শক্তি প্রয়োগে কম্পনের ক্ষেত্রে গ্রীন ফাংশন : গ্রীন ফাংশন গঠনের জন্য আমরা একটি সমাধান বিবেচনা করতে পারি যা কেবল r এর ফাংশন

$$v_0(r)$$

গোলার স্থানাংকে ফাংশন $v_0(r)$ এর জন্য লাপ্লাসের অন্তরক সমীকরণ হলো

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv_0}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2(rv_0)}{dr^2}$$

যদি $w = rv_0$ হয় তবে উক্ত সমীকরণটি সাধারণ অন্তরক সমীকরণ

$$\frac{d^2w}{dr^2} + cw = 0$$

তে পরিণত হয়। যখন $c = k^2,\ c > 0$ এবং $c = -k^2,\ c < 0$ তখন আমরা যথাক্রমে পাই

$$\frac{d^2w}{dr^2} + k^2w = 0,\ (c>0) \qquad (৮২)$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} - k^2w = 0,\ (c<0) \qquad (৮৩)$$

সমীকরণ (৮২) এর সমাধান হলো

$$w = c_1 e^{ikr} + c_2 e^{-ikr} \qquad (৮৪)$$

যার ফলে পাওয়া যায়

$$v_0 = c_1\frac{e^{ikr}}{r} + c_2\frac{e^{-ikr}}{r} \qquad (৮৫)$$

যখন k এর মান বাস্তব তখন দুটি যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল সমাধান হবে নিম্ন আকারের

$$\frac{e^{ikr}}{r} \to \frac{\cos kr}{r}$$

$$\frac{e^{-ikr}}{r} \to \frac{\sin kr}{r}$$

যখন $c < 0$ $(c = -k^2)$ তখন (৮৩) এর দুটি গোলাশ্রয়ী অনির্ভরশীল সমাধান হবে যথাক্রমে

$$\frac{e^{-kr}}{r} \text{ এবং } \frac{e^{kr}}{r} \quad (k > 0) \tag{৮৬}$$

উক্ত সমাধানগুলি যথা

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r}, (c > 0) \text{ এবং } \frac{e^{\pm kr}}{r}, (c < 0)$$

$r = 0$ তে বিচ্ছিন্ন এবং $\frac{1}{r}$ এর মত $r = 0$ তে অসীম মানসম্পন্ন। এ কারণে বলা যায় যে, $r = 0$ বিন্দুতে তাদের সিংগুলারিটি আছে। এ ধরনের সিংগুলারিটি লাপ্লাস সমীকরণের $(c = 0)$ গ্রীন ফাংশনে বিদ্যমান যা $\frac{1}{r}$ এর আনুপাতিক। কাজেই এ সমাধানগুলি গ্রীন ফাংশন।

উক্ত ফাংশনগুলির অসীম বিন্দুতে আচরণ নিয়ে আমরা আলোচনা করব। $c < 0$ এই প্রক্রিয়াটি শোষণ প্রক্রিয়া। সমাধান $\frac{e^{-kr}}{r}$ অসীম দূরত্বে শূন্যের দিকেধাবিত হয়। এটি, ডিফিউশন (diffusion) প্রক্রিয়ার ভাষায়, শোষণজনিত কারণে ঘনিভূত হওয়া কমতে থাকে। সহগ $|c| = k^2$ এর মান যতো বাড়তে থাকে, উক্ত হ্রাস ততো বেশি হতে থাকে। এখানে $|c|$ হলো শোষণের শক্তি। আবার r যখন অসীম হয় তখন দ্বিতীয় সমাধান $\frac{e^{kr}}{r}$ পাওয়ার (power) সিরিজের দিক থেকে অসীমভাবে বৃদ্ধি হতে থাকে। সীমাহিন জায়গাতে এর তেমন কোনো গুরুত্ব নেই। অসীম দূরত্বে একটি উৎস হিসেবে এর ব্যাখ্যা দেয়া যেতে পারে।

যখন $c = k^2 > 0$ তখন এটি শক্তি প্রয়োগে তরঙ্গ-প্রক্রিয়া বলে অভিহিত। ফাংশন v তখন অতিসরণ (amplitude) ফাংশন :

$$u(p, t) = v(p)\, e^{i\sigma t}$$

প্রকাশ করে যা কম্পন সমীকরণ সিদ্ধ করে। এ ক্ষেত্রে প্রধান সমাধানের একটি সমাধান

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

কম্পন প্রক্রিয়া

$$u_0(r\,,\,t)=\frac{e^{i(\sigma t+kr)}}{r}$$

এর সাথে যোগসূত্র স্থাপন করে। এই সমাধানের গোলকীয় তরঙ্গ চরিত্র পাওয়া যায় যা উৎস $r=0$ থেকে অগ্রসর হতে থাকে। দ্বিতীয় সমাধান

$$v_0(r)=\frac{e^{ikr}}{r}$$

কম্পন প্রক্রিয়া

$$u_0(r\,,\,t)=\frac{e^{i(\sigma t+kr)}}{r}$$

এর সাথে যোগসূত্র স্থাপন করে।

এর গোলকীয় তরঙ্গ চরিত্র পাওয়া যায় যা অসীম দূরত্ব থেকে $r=0$-তে অগ্রসর হয়। প্রকৃতপক্ষে এ ধরনের সমাধানের কোনো ভৌতিক অর্থ নেই।

উপরিউক্ত আলোচনা থেকে আমরা ধরে নিব যে, $v(p)$ হলো p বিন্দুতে $e^{i\sigma t}$ অথবা $e^{-i\sigma t}$ ধরনের কম্পনের অতিসরণ। আমরা $e^{i\sigma t}$ সময় উৎপাদকটি বেছে নিব। যদি আমরা $e^{-i\sigma t}$ গ্রহণ করি, তাহলে অপগামী তরঙ্গ নিম্ন আকার ধারণ করে

$$u_0(r\,,\,t)=\frac{e^{-i(\sigma t-kr)}}{r}$$

এই তরঙ্গ আকারটি দ্বিতীয় সমাধান

$$v_0(r)=\frac{e^{ikr}}{r}$$

এর সাথে যোগসূত্র স্থাপন করে। অতএব প্রথম সমাধান

$$v_0(r)=\frac{e^{-ikr}}{r}$$

এর বাস্তবিক পক্ষে কোনো ভৌতিক অর্থ পাওয়া যায় না।

উপরিউক্ত আলোচনা থেকে এটি স্পষ্ট যে গ্রীন ফাংশনের নিম্নোক্ত ধর্মগুলি বিদ্যমান আছে। যদি গ্রীন ফাংশনকে $G(P\,,\,P_0)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহলে নিচের ধর্মগুলি পাওয়া যায় :

১। কোনো অঞ্চল T এর যে কোনো বিন্দু $P = P_0$ তে গ্রীন ফাংশন $G(P, P_0)$ এর মান $\frac{1}{r}$ ($r = 0$ হলে) এর মতো অসীম হবে।

২। গ্রীন ফাংশন $G(P, P_0)$ সুষম সমীকরণ $L(u) = 0$ কে অঞ্চল T এর P_0 বিন্দু ছাড়া সকল বিন্দুতে সিদ্ধ করে

৩। সীমানা S এর উপর যে কোনো বিন্দু Q এর জন্য গ্রীন ফাংশন $G(Q, P_0) = 0$

৪। যে কোনো অঞ্চল T তে, যেখানে গ্রীন ফাংশন বর্তমান থাকে, $G(P, P_0) = G(P_0, P)$। এখানে P এবং P_0 অঞ্চল T এর দুটি বিন্দু। গ্রীন ফাংশনের এই নীতিকে আদান-প্রদান নীতি অথবা বিপরীতমুখী নীতি বলে।

প্রশ্নমালা

১। ফাংশন $u(x, y)$ সমীকরণ

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \ (0 \leqslant x \leqslant 1), \ (y \geqslant 0)$$

$$u_x(0, y) = 0, \ u(1, y) = 0, \ u(x, 0) = F(x),$$ কে সিদ্ধ করে এবং এটি সীমাবদ্ধ। দেখাও যে

$$u(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-my} \cos mx \int_0^1 F(z) \cos mz \, dz$$

যেখানে $m = (n - \frac{1}{2})\pi$

২। মনে করি $u(x, y)$ হলো একটি পাতলা পাতে অবিচলিত তাপমাত্রা। পাতটি অসীম-প্রায় এবং সামনের তলের তাপ অন্য একটি মাধ্যমের শূন্য তাপমাত্রাতে পরিচালিত হচ্ছে, যেখানে

$$u_{xx} + u_{yy} - bu = 0 \ (0 < x < 1, \ y > 0)$$

যদি $u(x, y)$ সীমাবদ্ধ হয় এবং শর্ত

$$u(0, y) = 0, \ u_x(1, y) = -hu(1, y),$$

$$u(x, 0) = 1, \ (0 < x < 1)$$

কে সিদ্ধ করে, তবে দেখাও যে,

$$u(x, y) = 2h\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n} \exp\left[-y(b+\alpha_n^2)^{1/2}\right] \sin\alpha_n x \ (b>0, h>0)$$

যেখানে $A_n = (1-\cos\alpha_n)/(h+\cos^2\alpha_n)$

এবং $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots$ হলো সমীকরণ $\tan\alpha = -\alpha/h$ এর সম্ভাব্য মূল।

৩। মনে করি $u(x, y)$ হলো একটি অসীম প্রিজমে, যখন প্রিজমটি $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ তল দ্বারা সীমাবদ্ধ অবিচলিত তাপমাত্রা। যদি $y=1$ তলে $u=1$, $x=1$ তলে $u_x = -hu$, $h>0$ এবং অন্য দুটি তলে $u=0$ হয় তাহলে প্রমাণ কর যে

$$u(x, y) = 2h\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sinh\alpha_n y}{\alpha_n \sinh\alpha_n} \sin\alpha_n x$$

যেখানে A_n এবং α_n ২ নং এর অনুরূপ।

৪। সমাধান কর :

$$u_{xx}(x, t) = (t+1)\,u_t(x, t),$$

$$u(0, t) = 0, \ u_x(1, t) = 0, \ u(x, 0) = F(x)$$

যেখানে $0 \leqslant x \leqslant 1$, $t>0$। যখন $F(x) = 1$ $(0<x<1)$

তখন দেখাও যে

$$u(x, t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m}(t+1)^{-m^2} \sin mx$$

যেখানে $m = (n-\frac{1}{2})\pi$ ।

৫। একটি টানা তারের প্রান্ত $x=1$ স্থিতিস্থাপকভাবে আটকানো যাতে এর আড় সরণ $Y(x, t)$ শর্ত $Y_x(x, t) = -h\,Y(1, t)$ পূরণ করে। মনে করি

$$Y(0, t) = 0, \ Y(x, 0) = bx, \ Y_t(x, 0) = 0$$

তাহলে দেখাও যে, সমীকরণ

$$Y_{tt}(x, t) = Y_{xx}(x, t)$$

পরিভাষা

absolute পরম
adjoint যুক্ত
behave আচরণ করা
boundary প্রান্ত
boundary value প্রান্তিক মান
confluent প্রবহ
convergent অভিসারী
continuous অবিচ্ছিন্ন
divergent অপসারী
duplication formula প্রতিসূত্র
generating function উৎস ফাংশন
generalized সর্বজনীন
generalize সর্বজনীনকরণ
homogeneous সমজাতীয়
integral সমাকলক
integration সমাকলন
initial প্রারম্ভিক
impulse সহসা শক্তি
identical অভিন্ন
jump লাফ, ব্যতিক্রম
linear যোগাশ্রয়ী
maxima ঊর্ধ্ব বিন্দু
minima অধবিন্দু
maximum value ঊর্ধ্ব মান
minimum value অধমান
norm আদর্শ
operation প্রক্রিয়া
operator সংঘটক
oscillating দোদুল্যমান
recurrence পৌনঃপুনিক
residue অবশেষ
sectionally ছেদাংশে, স্বখণ্ড
symmetric সামঞ্জস্যপূর্ণ
self-adjoint স্বযুক্ত
steady অবিচলিত
singularity ব্যতিক্রমী বিন্দু
singular ব্যতিক্রম
weight function ভারবত্তা ফাংশন